1971
Verlag Schnelle, Eberhard und Wolfgang Schnelle GmbH, Quickborn

*Druck und Einband: Maurischat & Bevensee, Quickborn
Printed in Germany*

GRUNDLAGENSTUDIEN

AUS

KYBERNETIK

UND GEISTESWISSENSCHAFT

BAND 12 HEFT 2 - 3 | OKTOBER 1971 | KURZTITEL GrKG 12/2-3

INHALT

W. W. SCHUHMACHER	Anpassung und Angleichung im sprachlichen Entwicklungsprozeß	43
HUBERT SCHLEICHERT	Adverbialausdrücke innerhalb der Prädikatenlogik	47
KARL ECKEL	Rangkorrelation bei abhängigen Adressaten	57
HANNO EHSES SIEGFRIED MASER G. WIESENFARTH	Über die Präzisierung der Begriffe Gestalthöhe und Gestaltreinheit am Beispiel von Rosetten	63
G. SCHRAGE	Ein Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung?	83

VERLAG SCHNELLE QUICKBORN

Neuerdings vollzieht sich eine immer stärker werdende Annäherung zwischen Natur- und Geisteswissenschaft als Auswirkung methodologischer Bestrebungen, für die sich das Wort Kybernetik eingebürgert hat. Die Einführung statistischer und speziell informationstheoretischer Begriffe in die Ästhetik, die invariantentheoretische Behandlung des Gestaltbegriffs und die Tendenzen, zwischen der Informationsverarbeitung in Maschine und Nervensystem Isomorphismen nachzuweisen, sind nur drei Symptome dafür.
Die Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft sollen der raschen Publikation neuer Resultate dienen, welche diese Entwicklung zu fördern geeignet sind. Veröffentlicht werden vor allem grundlegende Ergebnisse, sowohl mathematischer, psychologischer, physiologischer und in Einzelfällen physikalischer als auch philosophischer und geisteswissenschaftlicher Art. Nur in Ausnahmefällen werden dagegen Beiträge über komplexere Fragen der Nachrichtentechnik, über Schaltungen von sehr spezieller Bedeutung, über Kunst und literaturgeschichtliche Probleme etc. angenommen. In geringer Zahl werden Buchbesprechungen veröffentlicht.

Erscheinungsweise: Viermal im Jahr mit je 32 bis 48 Seiten.
Beiheft: Im Jahr erscheint für Abonnenten ein Beiheft.
Preis: DM 4,80 je Heft und Beiheft.
Im Abonnement Zustellung und Jahreseinbanddeckel kostenlos. Bezug durch Buchhandel oder Verlag.
Manuskriptsendungen: an Schriftleitung gemäß unserer Richtlinien auf der dritten Umschlagseite.

Les sciences naturelles et les sciences humaines se rapprochent de plus en plus; ce rapprochement est une conséquence des tendances métodologiques appelées cybernetique. L'introduction en esthétique de termes statistiques et surtout de termes de la théorie de l'information, le fait de considérer mathématiquement la notion de Gestalt comme une invariante, et les tendances à chercher des isomorphismes entre la transformation de l'information par les machines et par le système nerveux sont seulement trois exemples du dit rapprochement.
Les «Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft» ont pour but de publier rapidement des résultats nouveaux capables de contribuer à ce dévéloppement. Surtout des résultats fondamentaux (soit de caractère mathématique, psychologique, physiologique et quelquefois physique — soit de caractère philosophique ou appartenant aux sciences humaines) sont publiés. Par contre des travaux concernant soit des questions assez complexes de la théorie de communication et télécommunication, soit des reseaux éléctriques ayant des buts trop spéciaux, soit des problèmes de l'histoire de l'art et de la litérature etc. ne sont acceptés qu'exceptionnellement aussi que les comptes rendus de nouveaux livres.

Il paraissent 4 numéros de 32 à 48 pages par an et un numéro spécial, pour les abonnés. Prix: DM 4.80 le numéro (et le numéro spezial) L'envoi et la couverture du tome complèt (à la fin de chaque année) est gratis pour les abonnés.
Les G KG sont vendus en librairie ou envoyés par les Editeurs Schnelle
Les manuscrits doivent être envoyés au rédacteur en chef. Quant à la forme voir les remarques à la page 3 de cette couverture.

Natural and cultural sciences are in train to come together closer and closer as a consequence of methodologica- tendencies called cybernetics. The introduction of terms of statistics and specially of information theory into the terminology of esthetics, the interpretation of 'Gestalten' as mathematical invariants, and the search for isomorphisms by comparing information handling in computers and the brain are only three symptoms of the process mentioned above.
The Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft would like to cultivate this tendencies by rapid publication of new results related to cybernetics, especially results of basic interest, no matter whether belonging to the field of mathematics, psychology, physiology and sometimes even of physics, or rather to the fields of philosophy and cultural sciences. But papers which concern complex technical problems of transmission and processing of information, or electrical networks with very limited purpose, or the history of art and literature, are accepted only exceptionally. There will also be few recensions of books.

G KG are published in 4 numbers each year, with 32–48 pages per number. A special number is edited each year for the subscribers.
Price: DM 4.80 per number (and spezical number) Mailing and cover of the volume (to be delivered together with the last number each year) is free for subscribers. The G KG may be received by booksellers or directly by the publisher.

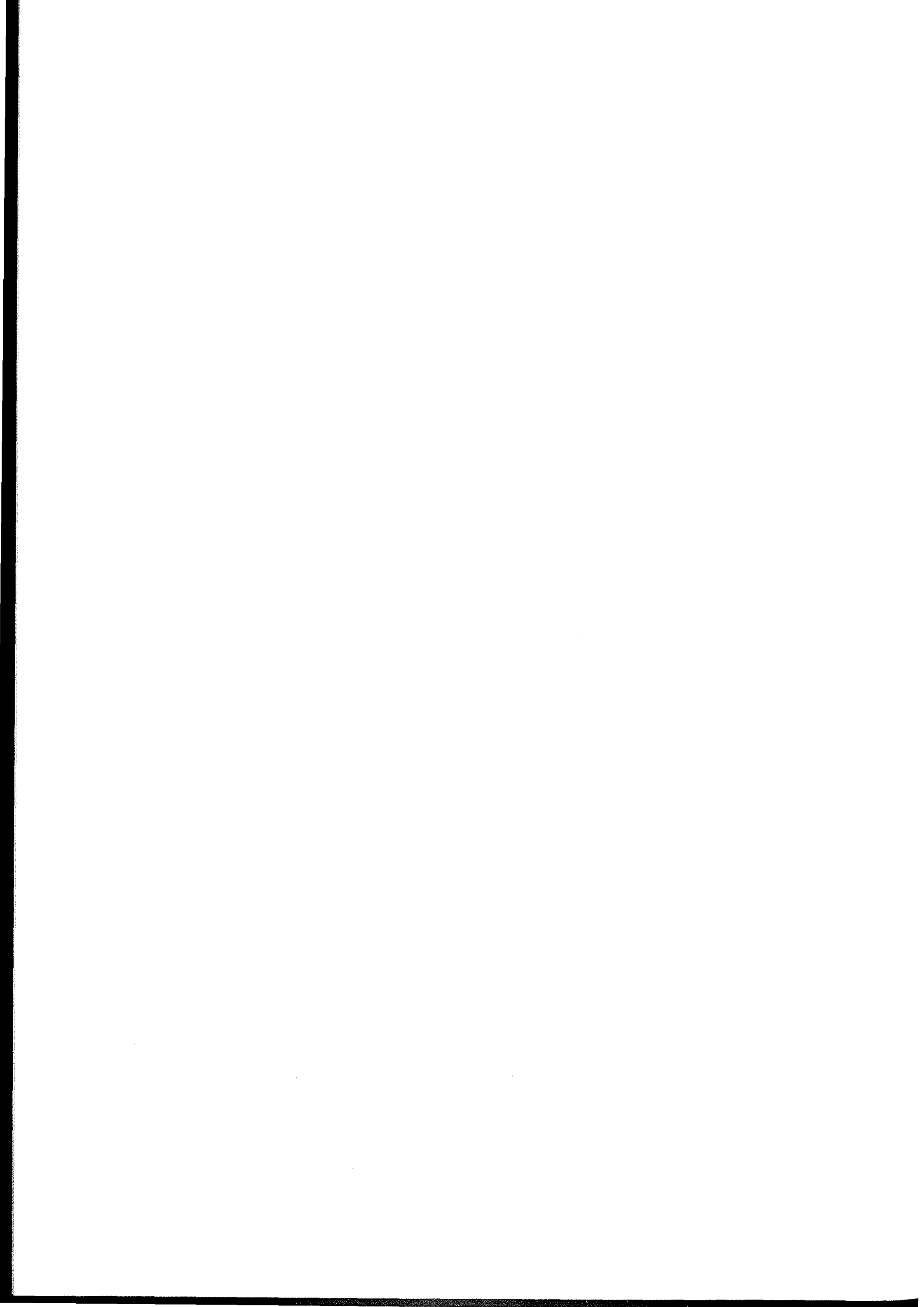
Papers should be sent to the editors. For the form of manuscript see page 3 of this cover.

Vorbemerkung
Zu Heft 12/2-3

Durch schwerwiegende Ausfälle in der Herstellung bedingt, können Heft 2 und 3 des 12. Jahrgangs erst jetzt erscheinen. Ausnahmsweise mußte auf die bisherige Form (Randausgleich) verzichtet werden.
Wir bitten unsere Leser um Verständnis für diese Notlösung und hoffen, das Heft 12/4 wieder pünktlich und in der gewohnten Form herausbringen zu können.

Die Redaktion

Oktober 1971



ANPASSUNG UND ANGLEICHUNG IM SPRACHLICHEN ENTWICKLUNGSPROZESS

von W. W. Schuhmacher, Kopenhagen

Smith (1970) hat die Abhängigkeit der statistischen Verteilung der (englischen) Konsonanten von deren Unterscheidbarkeit bewiesen. Wurden Personen Störgeräuschen ausgesetzt, so kam bei ihnen eine kompensierende (negative) Rückkopplung zur Anwendung: Vom Sprecher wurden vor allem solche Wörter ausgewählt, deren konsonantische Elemente eine hohe funktionelle Belastung und eine relativ große Distanz untereinander aufwiesen. Durch diese Reduzierung des Inventars der konsonantischen Elemente wurde ein *wirksamerer* Code für die Kommunikation erstellt, welcher die Möglichkeit bot, die Störgeräusche zu paralysieren.

Dieser Sachverhalt soll auf den sprachlichen Entwicklungsprozeß übertragen werden, denn es mag postuliert werden, daß Störungen dafür verantwortlich sind, wenn in verschiedenen Sprachen eine Reduzierung von Elementarzeichen (Konsonanten, Vokale) oder Superzeichen (Morpheme) stattgefunden hat.

So ist die Reduktion von konsonantischen Elementen das Hauptmerkmal der Entwicklung vom Urmalaio-polynesischen zu den ozeanischen Sprachgruppen (vor allem zur polynesischen) und von diesen zu den einzelnen Sprachen und Dialekten: Konsonanten sind verloren gegangen - entweder durch Schwund (A > Ø) oder durch Unifizierung (A, B > A; A, B > B; A, B > C), und diese Änderung mag interpretiert werden als eine verbesserte Anpassungsreaktion gegenüber Störungen (dem koexistenten Inventar der Elementarzeichen eines sprachlichen Sub-, Super- oderAdstratums).

So bestand das konsonantische Inventar des Urpolynesischen (UPN.) aus 13 Elementen: / p t k ' f v s h m n N l r /. Die heutigen polynesischen Sprachen und Dialekte mögen mit einem sprachlichen Stratum konfrontiert worden sein: Papuanisch im westlichen und Amerindianisch im östlichen Pazifik, und diese Störbedingungen mögen für die charakteristischen Reduzierungen der polynesischen Konsonateninventare (Schuhmacher, 1969) verantwortlich sein.

Das Hawaiische (8 Konsonaten) ist die Sprache, welche die höchste Reduzierung erfahren hat. Wir gehen davon aus, daß dieses Teilinventar gemäß der statistischen Struktur des UPN. erzeugt worden ist, und messen, wie sich die *relative Entropie* h (´ensemble efficiency´; Meyer-Eppler, 1959)

geändert hat. Tabelle 1 gibt eine analytische Transkription (´distinctive feature analysis´, Jakobson et al., 1961) der konsonantischen Elemente; Tabelle 2 zeigt die relative Entropie der binär transkribierten Inventare.

	p	t	k	´	f	v	s	h	m	n	N	l	r
vokalisch	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
nasal	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+		
dauernd	-	-	-	-	+	+	+	+				+	-
zentral	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-		
anterior	+	+	-	-	+	+		-	+		-		
stimmhaft					-	+							

UPN.

	p	k	´	v	h	m	n	l
vokalisch	-	-	-	-	-	-	-	+
nasal	-	-	-	-	-	+	+	
dauernd	-	-	-	+	+			
zentral	-	+	-					
anterior	+		-	+	-	+	-	

Hawaiisch

Tabelle 1. Analytische Transkription der Konsonanteninventare von UPN. und Hawaiisch.

	Z	n	h(%)	h_d(%)	h_a(%)
UPN.	13	4.3	86	23	100
Hawaiisch	8	3.6	83	28	100

Z: Zahl der konsonantischen Elemente
n: durchschnittliche Zahl der distinktiven Merkmale, die nötig sind, um jedes konsonantische Element von den anderen abzugrenzen
$h = k/n; \; k = \mathrm{ld}\, Z$
$h_d = 1/n$ (optimale Elementen-Distanz)
$h_a = 1$ (optimale funktionelle Ausnutzung)

Tabelle 2. Relative Entropie h der binär transkribierten Konsonanteninventare von UPN. und Hawaiisch.

Es zeigt sich, daß das Teilinventar des Hawaiischen wirksamer ist als das Ausgangsinventar des UPN.: Relative Entropie und optimale Elementen-Distanz haben sich einander genähert, d. h. es wurde eine größere Stabilität gegenüber der Störung erreicht.

Diese Reduktion der Elementarzeichen findet ihre Parallele bei den Superzeichen, wenn z.B. morphologische Gegensätze beim Nomen und Verbum reduziert werden, wie es im Englischen - im Unterschied zum Deutschen - der Fall gewesen ist, wo die Störung durch keltisches und französisches Stratum manifestiert wird.

Es bleibt die Frage zu beantworten, warum unter den gleichen Störbedingungen nicht in jedem Fall mit einer Reduzierung von Zeichen reagiert worden ist. Man muß demnach für das sprachliche Verhalten die unterschiedlichen Voraussetzungen bestimmen, welche einerseits kompensierende (negative) Rückkopplung, andererseits kumulative (positive) Rückkopplung bewirken, wodurch sich eine A n p a s s u n g bzw. eine A n g l e i c h u n g an die sprachlichen Umweltsveränderungen vollzieht. Die Lösung dieses Problems mag in der Betrachtung dieser beiden

sich widersprechenden Tendenzen unter spieltheoretischem Aspekt zu suchen sein (Schuhmacher, 1970 b), wobei (als variable Größe) der ´Nutzen´ von zentraler Bedeutung ist.

Addendum

Die obige Unterscheidung Anpassung : Angleichung zwingt uns, in einem früheren Artikel (Schuhmacher, 1970 a) ´Anpassung´ durch ´Angleichung´ zu ersetzen (S. 32, Z. 9).

Schrifttumsverzeichnis

Jakobson, R.
Fant, G.
Halle, M. — Preliminaries to Speech Analysis, Cambridge, Mass. 1961, The M.I.T. Press

Meyer-Eppler, W. — Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1959, Springer

Schuhmacher, W.W. — The Measurement of Linguistic Change: A Study in the Field of Human Development, Kybernetik 5, S. 219 - 21, 1969

Schuhmacher, W.W. — Versuch einer Modellierung des sprachlichen Entwicklungsprozesses, GrKG 11/1, S. 31 - 32, 1970 a

Schuhmacher, W.W. — "Colonel Glotto" oder Sprachlicher Konflikt als strategisches Spiel, GrKG 11/3, S. 103 - 105, 1970 b

Smith, P.T. — Communications over Noisy Channels: Applications to the Statistical Structure of English, Brit. Journ. Psychol. 61, S. 197 - 206, 1970

Eingegangen am 28. November 1970

Anschrift des Verfassers:
Amanuensis W. W. Schuhmacher
DK 3500 Vaerlöse, Klostergaardsvej 18

ADVERBIALAUSDRÜCKE INNERHALB DER PRÄDIKATENLOGIK

von Hubert Schleichert, Konstanz

1. Es gibt bisher nur einen einzigen ernsthaften Versuch, für Adverbialausdrücke (im folgenden "AVA" genannt) eine Übersetzung in den Formalismus der Prädikatenlogik zu geben. Es ist dies der § 53 von Hans REICHENBACHs "Elements of Symbolic Logic". Das Buch ist leicht greifbar und die Reichenbachsche Behandlung der AVA ist neuerdings durch eine Arbeit von T. PARSONS wieder zur Diskussion gestellt worden. Daher kann auf eine Darstellung des Reichenbachschen Versuches hier verzichtet werden.

Reichenbach geht implizit von der Frage aus: Welches ist der logische, typenhierarchische oder ontologische Status der AVA? In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage überhaupt nicht gestellt, vielmehr wird ausgegangen von der Frage nach dem Zweck der Übersetzung umgangssprachlicher Ausdrücke in einen logischen Formalismus.

Die symbolische Logik stellt ein Instrumentarium zur Verfügung, mit dem man die Ableitungsbeziehung zwischen Sätzen untersuchen kann. Wenn wir an diesen Beziehungen interessiert sind, speziell also an der Frage, ob ein vorgelegter Satz aus anderen, ebenfalls vorliegenden Sätzen folgt, dann ist die symbolische Logik die adäquate Arbeitsmethode.

Insbesondere ist die automatische Beantwortung von Fragen auf Grund eines bereits vorhandenen, in Satzform gespeicherten Wissens ein derartiges Problem (vgl. z. B. F. BLACK). Andererseits ist die symbolische Logik ungeeignet zur Behandlung von Problemen der einzelsprachlichen Syntax oder Grammatikalität. So ergibt sich für die folgenden Überlegungen als zentraler Aspekt die Frage der Ableitungsregeln für Sätze mit AVA.

Eine prädikatenlogische Formalisierung von Adverben soll demgemäß folgende Kriterien erfüllen:

1) Sie muß mit der üblichen Prädikatenlogik verträglich sein, darf aber eine Erweiterung derselben sein.

2) Sie muß die Formulierung von Ableitungsregeln möglich machen, die möglichst viel von den Ableitungsfähigkeiten des natürlichen Sprechens wiedergeben.

3) Der Übergang von einer sprachlichen Darstellung zu einer anderen desselben Sachverhaltes soll wiedergebbar sein.

4) Sie soll keine vermeidbare Ontologie bemühen.

2. Die Notation, die im folgenden verwendet wird, ist eine Erweiterung üblicher logischer Systeme. Wir schreiben Vollsätze ohne Klammern, zur besseren Lesbarkeit jedoch strikt mit Kleinschreibung des Prädikats und Großschreibung der Individuenkonstanten:

schreibt Hans

größer_2 Hans, Karl

Der Index am Prädikat gibt die Stellenzahl des Prädikats an. Er ist ebenso wie die Groß- und Kleinschreibung systematisch ohne Bedeutung und kann weggelassen werden. Wir verwenden die üblichen logischen Konstanten: Negation $\sim$, Konjunktion &, Disjunktion v, Implikation $\rightarrow$, Alloperator (A), Existenzoperator (E). R e g e l n werden durch $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ symbolisiert.

Soll eine Aussage durch einen AVA näher bestimmt werden, so schreiben wir dies als Klammerausdruck hinter die Aussage. Der AVA-Klammerausdruck besteht in seiner Grundform aus zwei durch Doppelpunkt verbundenen Ausdrücken. Der erste dieser Ausdrücke gibt den Gesichtspunkt an, hinsichtlich dessen näher spezifiziert wird ("H-Ausdruck"), der zweite die Spezifizierung. Z.B.:

brüllt Hans (Frequenz: häufig)

Die AVA-Klammer kann beliebig viele verschiedene derartige Bestimmungen enthalten, die durch Semikolon zu trennen sind. Z.B.:

brüllt Hans (Frequenz: häufig; Art: zornig;
Grund: aus Hunger).

Weitere Formregeln werden wir in Abschnitt 5 einführen.

Mit Absicht wird die Anzahl der H-Ausdrücke nicht festgelegt. Es scheint uns im Rahmen unserer Absicht unnötig, eine Annahme über Anzahl oder Typisierung von AVA zu machen (etwa in Lokal-, Temporal-, Modal-, Kausal-AVA). Wesentlich ist nur, daß der Gebrauch der H-Ausdrücke konsequent und konsistent

geschieht. Für ein und denselben semantischen Aspekt muß auch stets derselbe H-Ausdruck verwendet werden. Statt "Frequenz" könnte aber ebenso gut stehen: "wie oft". Variable H-Ausdrücke werden nicht zugelassen (sie scheinen selten in der deutschen Sprache aufzutreten, etwa "Hans ist in irgendeiner Hinsicht großartig").

Aus naheliegenden Gründen muß schließlich durch explizite Aufzählung eine Liste von "entarteten" AVA festgelegt werden. Es sind AVA, welche sich auf den Wahrheitswert des Satzes, in dem sie auftreten, beziehen, z.B.:

niemals, anscheinend, unter keinen Umständen, vermutlich ...

Alle im folgenden aufzustellenden Ableitungsregeln gelten nur für nicht-entartete AVA. Regeln für entartete AVA werden in Abschnitt 6 festgelegt.

3. Renate STEINITZ hat in ihrer Arbeit über AVA auf eine Sonderklasse von Verben hingewiesen, nämlich solche, die notwendig eine nähere Bestimmung (durch einen AVA) erfordern, z.B.:

Romeo verhielt sich wie ein Anfänger
Der Weg führt nach Rom
Die Beispiele befinden sich auf S. 18
Hans zerschlägt die Vase.

Solche Sätze würden bei Elimination der AVA unverständlich werden. (Daß die Sätze ungrammatikalisch würden, ist logisch noch kein Einwand, solange sie eindeutig verständlich bleiben.) Aber diese Beispiele lassen sich zwanglos durch mehrstellige Prädikate formalisieren:

a verhält sich wie b
a führt nach b
a befindet sich in/auf b
a zerschlägt b.

Damit wird klar, weshalb solche Verben ohne AVA unverständliche Sätze liefern. Es handelt sich dann eben um unvollständige Substitutionen für die Leerstellen des betreffenden Prädikats. Umgangssprachlich werden derartige Ausdrücke wieder verständlich, wenn die nicht durch Konstanten ersetzten Variablen

durch unbestimmte AVA angedeutet werden. Man vergleiche:

Hans zerschlägt (zerschlägt$_2$ Hans)

Hans zerschlägt irgendetwas (zerschlägt$_2$ Hans, x)

Steinitz hat eingehend gezeigt, daß gerade bei Verben, die wir hier durch mehrstellige Prädikate wiedergeben, nicht beliebige AVA zulässig sind. So ist z.B. "Romeo verhielt sich in Berlin" unsinnig, obwohl ein AVA das Verb ergänzt. Es ist dies die aus der Logik und Semantik bekannte Frage nach der Entstehung unsinniger Sätze durch Einsetzen von Argumenten "eines anderen Typs" in die Leerstellen eines Prädikats (vgl. DRANGE). Aber wir wollen diese heikle Frage außer Betracht lassen; Verben mit obligater AVA-Ergänzung fassen wir als mehrstellige Prädikate auf, und für echte AVA machen wir hier keine Einschränkung durch semantische Typenregeln.

4. Deduktionsregeln für einfache AVA

a. Eliminationsregel: Aus einem isolierten, gültigen Satz mit AVA läßt sich ein gültiger Satz durch Weglassen des AVA ableiten. (vgl. Abschnitt 6.)

Beispiel: Hans läuft schnell $\longrightarrow$ Hans läuft

Regel: $f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H : a) \Longrightarrow f_n\ A_1 \ldots A_n$

Hier wird deutlich, weshalb wir obligate Adverbial-Ergänzungen nicht durch unsere AVA-Klammer wiedergeben dürfen. Wir würden sonst ja die Ableitung unerwünschter Ausdrücke zulassen.

b. Negationsregel: Ein Satz kann "total" falsch sein; dies drücken wir durch Negation des Prädikats aus:
$\sim f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H : a)$. Aber ein Satz kann auch bloß hinsichtlich des AVA falsch sein, und dies drücken wir durch Negation im AVA aus: $f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H : \sim a)$.

Beispiele: Hans läuft überhaupt nicht
Hans läuft, aber nicht schnell

In beiden Fällen soll die doppelte Negation weggelassen werden dürfen, insbesondere also gilt:

$$f_n A_1 \ldots A_n (H: \sim\sim a) \Rightarrow f_n A_1 \ldots A_n (H : a)$$

Schließlich wollen wir eine gewisse Vagheit der umgangssprachlichen Negation wiedergeben. Der Satz "Hans läuft nicht schnell" kann ja bedeuten, daß Hans läuft, aber nicht schnell; oder aber daß Hans überhaupt nicht läuft. Diese "unbestimmte" Negation wollen wir durch Negation des gesamten in Klammern stehenden Satzes und folgende Regel darstellen:

$$\sim(f_n A_1 \ldots A_n (H : a)) \Rightarrow \sim f_n A_1 \ldots A_n \vee f_n A_1 \ldots A_n (H : \sim a)$$

Dies läßt sich zweckmäßig auch als Implikation darstellen:

$$\sim(f_n A_1 \ldots A_n (H : a)) \Rightarrow (f_n A_1 \ldots A_n \rightarrow f_n A_1 \ldots A_n (H : \sim a)).$$

c. Substitutionsregel: Für einen AVA darf überall ein gleichbedeutender anderer AVA oder ein AVA, der aus dem ursprünglichen ableitbar ist, eingesetzt werden. Damit dieses Prinzip anwendbar wird, müssen natürlich entsprechende Aussagen über Adverbia zugelassen werden, z. B.:
"laut $\leftrightarrow \sim$ leise" (als Abkürzung für "(x) (laut x $\leftrightarrow \sim$ leise x)") oder "geräuschvoll $\rightarrow$ hörbar".

Beispiel:

läuft Hans (Art : schnell) $\rightarrow$ läuft Hans (Art: $\sim$ langsam)

Wenn wir - was naheliegt - explizite Definitionen für Adverbia zulassen, z. B. "schallend $=_{def.}$ laut & nachhallend", dann müssen wir natürlich auch die entsprechende Substitution im AVA zulassen. Dies führt u. U. auf einen Ausdruck, den wir eigentlich erst in Abschnitt 5 für zulässig erklären werden:

lacht Hans (Art: schallend) $\rightarrow$ lacht Hans (Art: laut & nachhallend)

5. Komplexe AVA

STEINITZ (S. 47 f.) hat 3 Typen komplexer AVA unterschieden, und wir wollen an Hand dieser Unterscheidung sowohl unsere Formregeln als auch unsere Schlußregeln erweitern.

a. Nebenordnung: Mehrere AVA beziehen sich auf dasselbe Prädikat, spezifizieren es aber in verschiedener Hinsicht. Die AVA sind gemäß unseren Formregeln durch Semikolon zu trennen. Als Eliminationsregel nehmen wir an, daß jeder einzelne AVA hier unabhängig von den anderen eliminiert werden darf, was die folgende Regel ausdrückt:

$$f_n\ A_1 \ldots A_n\ (\ldots;\ H_i : a_i; \ldots) \Rightarrow f_n\ A_1 \ldots A_n\ (\ldots; \ldots)$$

Abweichend von Steinitz lassen wir beliebige Umordnungen nebengeordneter AVA zu, da die Grammatikalität uns hier nicht interessiert:

$$f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H_1 : a_1;\ H_2 : a_2) \Rightarrow f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H_2 : a_2;\ H_1 : a_1)$$

("Hans geht hastig nach Hause" bzw. "Hans geht nach Hause hastig"). Die Substitutionsregel soll weiterhin gelten, und zwar für jeden einzelnen AVA unabhängig von allen anderen. Etwas komplizierter wird die Regel für die "unbestimmte" Negation:

$$\sim (f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H_1 : a_1;\ \ldots;\ H_i : a_i)) \Leftrightarrow \sim f_n\ A_1 \ldots A_n\ \ \mathrm{v}$$

$$\mathrm{v}\ f_n\ A_1 \ldots A_n\ (H_1 : \sim a_1;\ \ldots)\ \mathrm{v}\ \ldots\ \mathrm{v}\ f_n\ A_1 \ldots A_n\ (\ldots;\ H_i : \sim a_i)$$

b. Von Koordination wollen wir sprechen, wenn mehrere Adverbia sich in derselben Hinsicht auf dasselbe Prädikat beziehen. Wir lassen dafür als Erweiterung der Formregeln zu, daß ein H-Ausdruck nach dem Doppelpunkt von beliebig vielen, negierten oder nicht negierten, durch & oder v verknüpften Adverben gefolgt ist.

Beispiel:

kommt Hans (Zeit : heute v (morgen & übermorgen))

Wir wollen den auf den H-Ausdruck folgenden Komplex koordinierter Adverben durch das Symbol "k" abkürzen. Dann gelten folgende Regeln:

Der k-Ausdruck darf durch einen gleichbedeutenden (logisch äquivalenten) Ausdruck ersetzt werden; er darf durch einen aus k logisch oder auf Grund der Bedeutung der Termini ableitbaren Ausdruck ersetzt werden. (Die Formulie-

rung "auf Grund der Bedeutung ableitbar"* ist nach CARNAP syntaktisch durch entsprechende "meaning postulates" zu interpretieren .)

Die Regeln für die Negation bleiben gültig. Die Negation eines k-Ausdruckes kann nach den Regeln der Aussagenlogik umgeformt werden. Die Eliminationsregel gilt für den gesamten k-Ausdruck als ganzes unverändert.

Beispiele:

läuft Hans (Art: schnell & ausdauernd) →

→ läuft Hans (Art: ~langsam & ausdauernd)

bzw. → läuft Hans (Art: schnell)

läuft Hans (Art: ~ (schnell & ausdauernd))

läuft Hans (Art: ~ schnell v ~ ausdauernd)

Der Gebrauch koordinierter Adverben ermöglicht schließlich auch die Zusammenziehung von Sätzen:

$$f_n A_1 \ldots A_n \ (H : a) \quad \& \quad f_n A_1 \ldots A_n \ (H : b) \Longleftrightarrow$$

$$f_n A_1 \ldots A_n \ (H : a \ \& \ b)$$

Dieselbe Regel gilt für die Disjunktion. Die Ausdrücke a, b können auch negiert sein.

Obwohl unsere Schluß- und Formregeln für beliebige komplizierte Koordinationen gelten, dürfte es schwer sein, auch nur etwas komplexere Beispiele aus der deutschen Sprache zu geben.

c. S u b o r d i n a t i o n nennen wir das Verhältnis zweier AVA, von denen einer den anderen modifiziert. Wir erweitern dazu unseren Formalismus durch die Bestimmung, daß hinter jedem AVA in Klammern ein weiterer AVA stehen darf.

Beispiele:

Hans grüßt betont devot

grüßt Hans (Art : devot (Art : betont))

Hans kommt absichtlich und böswillig erst abends

kommt Hans (Zeit : abends (Art: absichtlich & böswillig))

Wir wollen solche AVA mit "eingebetteten" AVA als s-Ausdrücke bezeichnen. Die Substitutionsregeln gelten weiterhin für jeden einzelnen AVA, die Eliminationsregel läßt sich sinngemäß erweitern zu:

$$f_n A_1 \ldots A_n \; (\ldots ; \; H \; : \; a \; (H' \; : \; a'); \ldots) \implies$$

$$f_n A_1 \ldots A_n \; (\ldots ; \; H \; : \; a; \ldots)$$

Und zur Negationsregel ist folgende Erweiterung hinzuzufügen:

$$\ldots H : \sim (a \; (H' : a')) \ldots \iff \ldots \; H : a \rightarrow \ldots \; H : a \; (H' : \sim a') \ldots$$

Das übergeordnete Adverb fungiert bei unbestimmter Negation also gegenüber dem subordinierten gerade wie ein Prädikat.

Beispiel für unbestimmte Negation:

Hans kam nicht absichtlich zu spät $\rightarrow$

Wenn Hans (überhaupt) zu spät kam, dann nicht absichtlich.

Es scheint, daß s-Ausdrücke mit demselben H-Ausdruck in der Alltagssprache häufig sind und daß für sie speziellere Regeln aufgestellt werden können. Diese Vermutung sei hier nur an einem Beispiel demonstriert:

Hans wohnt in Deutschland in Berlin $\rightarrow$ Hans wohnt in Berlin

(vgl. hierzu die Ausführungen von Steinitz).

6. Implizite Negation und entartete AVA

Unsere Ableitungsregeln sollen auch folgende Satzfolge korrekt wiedergeben können: Hans singt nicht laut. Hans singt nicht leise. Also singt er überhaupt nicht.

Dazu ist zunächst folgendes zu beachten: Wenn man nicht positiv weiß, daß der Satz $f_n A_1 \dots A_n$ (ohne AVA!) gilt, dann muß ein durch AVA modifizierter Satz, der negiert wird, immer in der unbestimmten Form $\sim(f_n A_1 \dots A_n (H : a))$ geschrieben werden.

Weiters benötigen wir eine Formulierung, die besagt, daß wenn Hans überhaupt singt, er dies leise oder laut tun muß. Hierfür kann etwa dienen:

(1) singt Hans $\longrightarrow$ singt Hans (Art : laut v leise)

Dies, zusammen mit der Aussage

(2) $\sim$(singt Hans (Art : laut v leise)),

die sich aus den beiden Teilsätzen

(3) $\sim$(singt Hans (Art : laut)),
$\sim$(singt Hans (Art : leise))

ergibt, liefert schließlich

(4) $\sim$ singt Hans.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Eliminationsregel n i c h t gilt für Teilsätze von zusammengesetzten Sätzen, sondern nur für AVA in isolierten Sätzen. Unbesehene Anwendung der Eliminationsregel und schlechte Formalisierung der unbestimmten Negation könnten zu dem unerwünschten Resultat: "Hans singt nicht schön also singt er jedenfalls" führen.

Eine Besonderheit sind die entarteten Adverben. Angenommen wir haben einen Satz der Art:

singt Hans (Zeit : niemals)

abgeleitet, sagen wir mit Hilfe eines anderen Satzes

$\sim$ (heute v morgen) $\rightarrow$ niemals.

Das Wort "niemals" aber sei in der früher erwähnten Liste der entarteten Ad-

verben enthalten. Dann gilt insbesondere die Eliminationsregel nicht, statt dessen aber z.B. eine in der Liste enthaltene Regel:

$$f_n A_1 \ldots A_n \quad (\ldots; \text{ Zeit : niemals; } \ldots) \rightarrow \sim f_n A_1 \ldots A_n$$

und wir können den Satz $\sim f_n A_1 \ldots A_n$ ableiten.

Derartige Regeln legen die Bedeutung der einzelnen entarteten Adverben (so z.B. auch des Wortes "nicht"!) fest; sie können im Sinne der bereits erwähnten Arbeit CARNAPs als Bedeutungspostulate angesehen werden.

Schrifttumsverzeichnis

Black, F. — A Deductive Question-Answering System. In: "Semantic Information Processing", Edit. M. Minsky. MIT Press 1968

Carnap, R. — Meaning Postulates. Appendix in dem Buch: Meaning and Necessity. Chicago 1960 (und früher)

Drange, Th. — Type Crossings. The Hague, 1966 (= Janua Linguarum XLIV)

Parsons, T. — Some Problems Concerning the Logic of Grammatical Modifiers. Synthese 21 (1970) S. 320 - 334

Reichenbach, H. — Elements of Symbolic Logic. New York 1947

Steinitz, R. — Adverbial-Syntax. Studia Grammatica 10, Berlin 1969

Eingegangen am 18. Dezember 1970

Anschrift des Verfassers:
Dr. Hubert Schleichert
775 Konstanz
Universität, Fachbereich Philosophie

RANGKORRELATION BEI ABHÄNGIGEN ADRESSATEN

von Karl Eckel, Frankfurt

Die in meiner Arbeit "Der Korrelationskoeffizient bei verklumpten Variabeln" (Eckel 1970) angegebene Formel (9) ist falsch.

1. Der Ausdruck für die Produktmomentkorrelation bei Adressaten, die innerhalb einer Klasse (oder Gruppe) voneinander abhängen, lautet (Formel (8) der zitierten Arbeit):

$$(1) \qquad \hat{\varrho} = \frac{(\bar{n}-1)\, s_w^2(x,y) + s_b^2(x,y)}{\sqrt{\left[(\bar{n}-1)\, s_w^2(x) + s_b^2(x)\right] \cdot \left[(\bar{n}-1)\, s_w^2(y) + s_b^2(y)\right]}}$$

Hierbei bedeuten:

$$s_w^2(x,y) = \frac{1}{n-k} \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k;$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, n_i;$$

$$s_b^2(x,y) = \frac{1}{k-1} \sum n_i (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}),$$

$$s_w^2(x) = \frac{1}{n-k} \sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2;$$

$$s_b^2(x) = \frac{1}{k-1} \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2;$$

$$\bar{n} = \frac{1}{k-1} \left(n - \frac{1}{n} \sum n_i^2\right).$$

n: Anzahl der Adressaten der (gesamten) Stichprobe.
k: Anzahl der Klassen oder Gruppen.
n_i: Anzahl der Adressaten in der i - ten Klasse.
x_{ij}: (Z.B.) Note des j - ten Schülers der i - ten Klasse im Fach Deutsch.
y_{ij}: (Z.B.) Note dieses Schülers in Englisch.

$\bar{x}_i$: Mittlere Note der i - ten Klasse in Deutsch.

$\bar{\bar{x}}$: Mittlere Note der Schüler der gesamten Stichprobe in Deutsch.

2. Beschränken wir uns auf Rangskalen für x und y, also auf den Wertevorrat

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$$

so folgt für die in (1) vorkommenden Größen:

$$
(2)\quad \begin{cases}
s_w^2 (x, y) = -\dfrac{1}{n-k} \sum n_i \bar{x}_i \bar{y}_i + \dfrac{1}{n-k} \sum \sum x_{ij} y_{ij}, \\[2ex]
s_b^2 (x, y) = \dfrac{1}{k-1} \sum n_i \bar{x}_i \bar{y}_i - \dfrac{n (n+1)^2}{4 (k-1)}, \\[2ex]
s_w^2 (x) = -\dfrac{1}{n-k} \sum n_i \bar{x}_i^2 + \dfrac{n (n+1) (2n+1)}{6 (n-k)} \\[2ex]
s_w^2 (y) = -\dfrac{1}{n-k} \sum n_i \bar{y}_i^2 + \dfrac{n (n+1) (2n+1)}{6 (n-k)} \\[2ex]
s_b^2 (x) = \dfrac{1}{k-1} \sum n_i \bar{x}_i^2 - \dfrac{n (n+1)^2}{4 (k-1)} \\[2ex]
s_b^2 (y) = \dfrac{1}{k-1} \sum n_i \bar{y}_i^2 - \dfrac{n (n+1)^2}{4 (k-1)}
\end{cases}
$$

$\bar{x}_i$: Mittlerer Rang der i - ten Klasse in Deutsch.

$\bar{y}_i$: Mittlerer Rang der i - ten Klasse in Englisch.

x_{ij}: Rang des j-ten Schülers in der i - ten Klasse in Deutsch.

y_{ij}: Rang des j-ten Schülers in der i - ten Klasse in Englisch.

Man erhält die gewünschte Rangkorrelation, wenn man die unter (2) berechneten Werte in die Formel (1) einsetzt. (Die zugrundegelegte Rangordnung bezieht sich auf die g a n z e Stichprobe und ist nicht etwa klassenbezogen.)

2.1 Für den Sonderfall gleichgroßer Klassen

$$n_i = \frac{n}{k} = \bar{n}$$

läßt sich ein einigermaßen übersichtlicher geschlossener Ausdruck für die Rangkorrelation aufstellen. Für den Zähler der rechten Seite von (1) folgt wegen

$$\bar{n} - 1 = \frac{n}{k} - 1 = \frac{n-k}{k}$$

aus (2):

$$- \frac{(n-k) \cdot n}{k \cdot k \cdot (n-k)} \sum \bar{x}_i \bar{y}_i + \frac{n-k}{k\,(n-k)} \sum \sum x_{ij} y_{ij}$$

$$+ \frac{n}{k\,(k-1)} \sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \frac{n\,(n+1)^2}{4\,(k-1)}$$

$$= \frac{1}{k} \sum \sum x_{ij} y_{ij} - \frac{n}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \frac{n\,(n+1)^2}{4\,(k-1)}$$

$$= \frac{1}{k} \sum \sum x_{ij} y_{ij} + \frac{n}{k \cdot k \cdot (k-1)} \sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \frac{n\,(n+1)^2}{4\,(k-1)}$$

Für den ersten Faktor des Radikanden in (1) folgt entsprechend:

$$\frac{1}{k} \sum \sum x_{ij}^2 + \frac{n}{k \cdot k \cdot (k-1)} \sum \bar{x}_i^2 - \frac{n\,(n+1)^2}{4\,(k-1)}$$

Da im ersten Glied dieses Ausdrucks die Quadrate sämtlicher Rangnummern von 1^2 bis n^2 addiert werden, ist

$$\frac{1}{k} \sum \sum x_{ij}^2 = \frac{1}{k} \sum_{1}^{n} \nu^2.$$

Damit erhalten wir gemäß (1):

$$\hat{\varrho}_{Rang} = \frac{\frac{1}{k} \sum \sum x_{ij} y_{ij} + \frac{n}{k \cdot k \cdot (k-1)} \sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \frac{n(n+1)^2}{4(k-1)}}{\left[\left(\frac{n}{k \cdot k \cdot (k-1)} \sum \bar{x}_i^2 + \frac{\sum \nu^2}{k} - \frac{n(n+1)^2}{4(k-1)} \right) \cdot \left(\frac{n}{k \cdot k \cdot (k-1)} \sum \bar{y}_i^2 + \frac{\sum \nu^2}{k} - \frac{n(n+1)^2}{4(k-1)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Wegen

$$\sum_{1}^{n} \nu^2 = \frac{n(1+n)(1+2n)}{6}$$

folgt:

$$\hat{\varrho}_{Rang} = \frac{12n \sum \bar{x}_i \bar{y}_i + 12k(k-1) \sum \sum x_{ij} y_{ij} - 3nk^2(n+1)^2}{\left[\left(12n \sum \bar{x}_i^2 + nk(n+1)(kn-k-4n-2) \right) \left(12n \sum \bar{y}_i^2 + nk(n+1)(kn-k-4n-2) \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

2.2 Die SPEARMAN-Formel als Sonderfall der Gleichung (3)

Für den Fall $k = n$ fällt die (innerhalb der Klassen bestehende) Abhängigkeit weg: in jeder Klasse befindet sich nur e i n Schüler.

Es folgt:

$$\sum \sum x_{ij} y_{ij} = \sum_{1}^{n} \bar{x}_i \bar{y}_i,$$

$$\sum \bar{x}_i^2 = \sum x_i^2 = \sum \nu^2 = \frac{n(1+n)(1+2n)}{6} \;;$$

aus (3) erhält man deswegen:

$$\hat{\varsigma}_{Rang} = \frac{12\, n^2 \sum x_i y_i - 3\, n^3 (n+1)^2}{n^2 (n+1) \cdot \left[\, 2 \cdot (2n+1) + n^2 - 5n - 2 \,\right]}$$

$$= \frac{12 \sum x_i y_i - 3n(n+1)^2}{n(n+1)(n-1)}$$

Führt man

$$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$$

in den letzten Ausdruck ein, so folgt die übliche Form der SPEARMAN-Formel:

$$\hat{\varsigma}_{Rang} = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n+1)(n-1)}$$

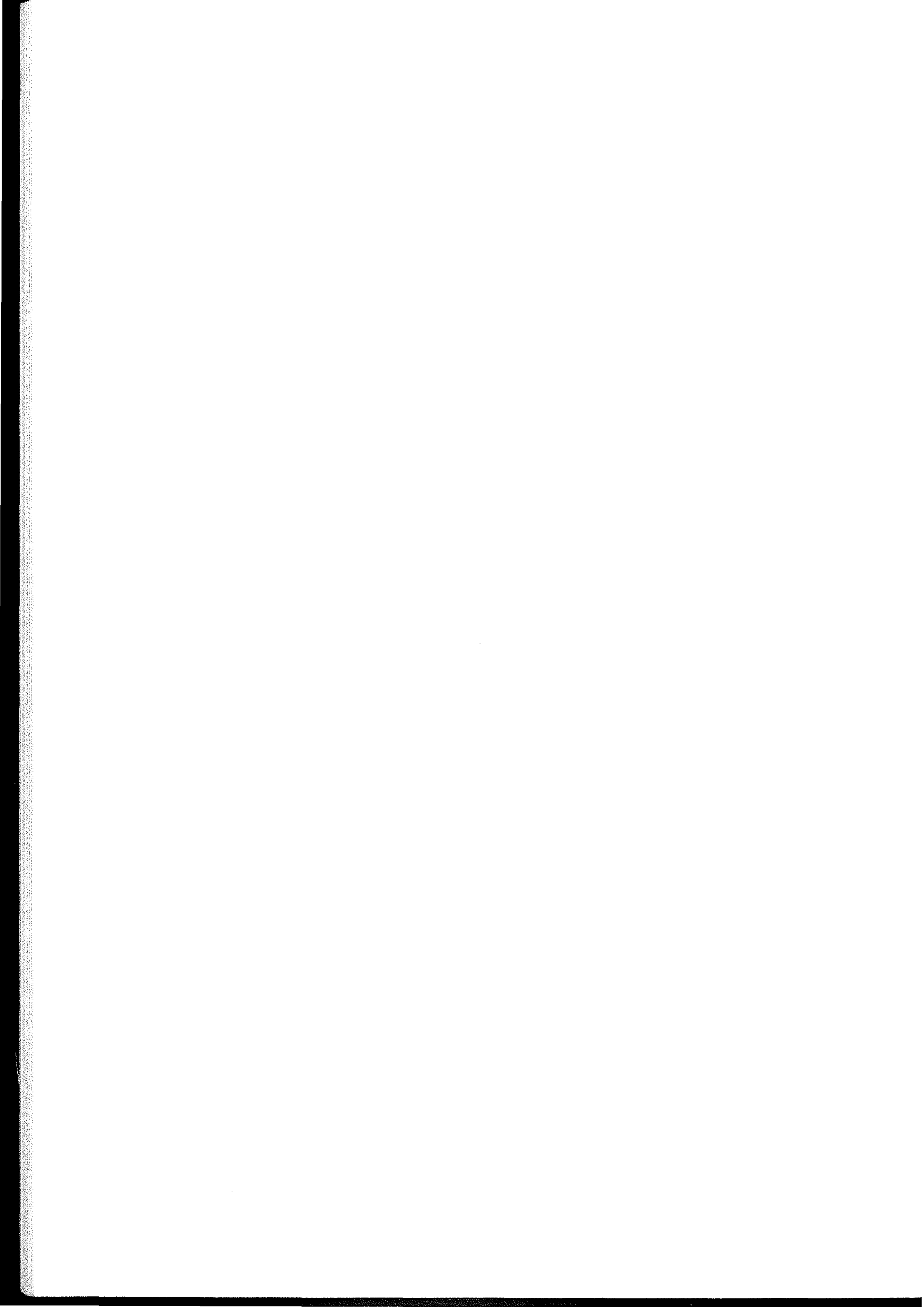
Schrifttumsverzeichnis

Eckel, Karl — Der Korrelationskoeffizient bei verklumpten Variablen, in: GrKG 11/1, 1970, S. 13

Eckel, Karl — Die Bedeutung des Klasseneffekts für die schulpädagogische Forschung, in: pl 3/1969, S. 97

Eingegangen am 3. Juli 1971

Anschrift des Verfassers:
Oberstudienrat Karl Eckel, 6 Frankfurt/Main 90, Schloßstr. 29-31
Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung



ÜBER DIE PRÄZISIERUNG DER BEGRIFFE GESTALTHÖHE UND GESTALTREINHEIT AM BEISPIEL VON ROSETTEN

von Hanno Ehses, Siegfried Maser, Gerhard Wiesenfarth,
Ulm/Stuttgart

"Von fundamentaler Bedeutung ist die Tatsache, daß es einen Grad der Gestaltung gibt - daß jede Gestalt eine bestimmte Höhe der Gestaltung aufweist ... Die höheren Gestalten unterscheiden sich von den niedrigeren außerdem dadurch, daß das Produkt von Einheit und Mannigfaltigkeit hier größer ist als bei jenen" (Chr. v. Ehrenfels, 1916, S. 44). "Ein weiteres, bisher noch nicht behandeltes Merkmal der Gestalten ist das der Reinheit. - Auch dieses Merkmal ist gradueller Natur, unterscheidet sich aber von der Gestaltungshöhe dadurch, daß es ein seiner Natur nach unübersteigbares Maximum besitzt - während Steigerung der Gestaltungshöhe ins Unendliche denkbar ist" (Chr. v. Ehrenfels, 1916, S. 44).

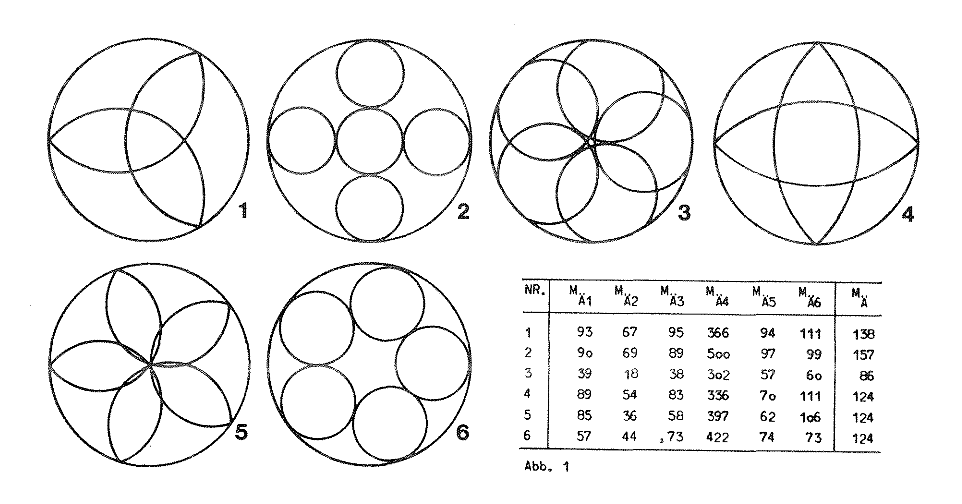
Da für Ehrenfels Gestalthöhe und Gestaltreinheit gradueller Natur sind, ist es naheliegend, diese Graduierung quantitativ zu erfassen. G. D. Birkhoff definiert quantitativ als ästhetisches Maß M realisierte Ordnung O pro materialen Aufwand C, also $M = O/C$ (G. D. Birkhoff, 1933). An Birkhoffs Beispielen (Polygone, Netze, Vasen) wird deutlich, daß ästhetische Zustände mit hohem M weitgehend dem entsprechen, was Ehrenfels Gestaltreinheit GR nennt, so daß vorläufig (1) $M = GR = O/C$ gesetzt werden kann. Gestalthöhe GH ist bestimmt durch das "Produkt von Einheit und Mannigfaltigkeit". Wird wiederum vorläufig Mannigfaltigkeit mit Birkhoffs Komplexität C identifiziert und die Einheit mit Birkhoffs Ordnung O, so ergibt sich (2) $GH = O \cdot C$. Aus (1) folgt, daß die Gestaltreinheit ein "unübersteigbares Maximum besitzt", falls auch O ein solches Maximum hat. Aus (2) folgt, daß eine "Steigerung der Gestalthöhe ins Unendliche denkbar ist", da insbesondere C beliebig groß werden kann.

"Die Idealgestalten der mathematisch genauen Kugel, der mathematisch genauen regelmäßigen Polyeder sind Gestalten von maximaler, das heißt auch der logischen Möglichkeit nach nicht mehr überbietbarer Reinheit, - aber auch von geringer Gestaltungshöhe" (Chr. v. Ehrenfels, 1916, S. 44f.). Eine solche Gegenläufigkeit zwischen Gestaltreinheit und Gestalthöhe kommt auch in O/C und $O \cdot C$ zum Ausdruck.

Das dorische Kapitell wird in der gängigen Kunstbetrachtung als ruhig, einfach, sparsam, asketisch, klar, streng, geometrisch, regulär gestaltet aufgefaßt, während im Gegensatz dazu dem korinthischen Kapitell die Eigenschaften üppig,

bewegt, prunkvoll, unregelmäßig, mannigfaltig, vielfältig zugeordnet werden. Das bedeutet, daß das dorische Kapitell primär als gestaltrein, das korinthische primär als gestalthoch zu kennzeichnen ist. Es ist daher sicher vorschnell, wenn wie bei Birkhoff allein das ästhetische Maß O/C mit dem ästhetischen Wert identifiziert wird oder wenn Ehrenfels (1922, S. 50) sagt: "Was wir 'Schönheit' nennen, ist nichts anderes als 'Höhe der Gestalt'. Unschön ist das niedrig Gestaltete."

Für das Folgende sei streng zwischen einer rein deskriptiven Maßästhetik und einer Wertästhetik unterschieden (vgl. M. Bense, 1965; S. Maser, 1970); letztere soll außer acht gelassen werden. Es soll am Beispiel einiger Rosetten eine Präzisierung der Begriffe Gestalthöhe und Gestaltreinheit ermittelt werden, die es erlaubt, verschiedene Gestalten verschieden deskriptiv zu erfassen.



NR.	$M_{Ä1}$	$M_{Ä2}$	$M_{Ä3}$	$M_{Ä4}$	$M_{Ä5}$	$M_{Ä6}$	$M_{Ä}$
1	93	67	95	366	94	111	138
2	9o	69	89	5oo	97	99	157
3	39	18	38	3o2	57	6o	86
4	89	54	83	336	7o	111	124
5	85	36	58	397	62	1o6	124
6	57	44	,73	422	74	73	124

Abb. 1

Der "vollständigen makroästhetischen Analyse" (S. Maser, 1970, S. 31f) der Rosetten von Abb. 1 liegen die folgenden 6 Aspekte zugrunde:

(1) C_1 = Anzahl der auftretenden Kreise und Kreisbogen,

O_1 wird bestimmt über 9 Anordnungseigenschaften: Äquivalenz von Kreisen bzw. Kreisbogen; Rotationssymmetrie; spezielle Lage der Kreis- bzw. Kreisbogenmittelpunkte; Kreise bzw. Kreisbogen, die durch den Mittelpunkt des Randkreises gehen; Berühren; Schnittpunkte von Kreisbogen auf dem Randkreis; Vertikal- und Horizontalsymmetrie; Zusammenhang des Liniennetzes; Verhältnis von Radien.

Aus C_1 und O_1 wird $M_{Ä1}$ berechnet (vgl. Maser, 1970, S. 37f). Dies gilt entsprechend für alle O_i und C_i.

(2) C_2 = Anzahl der auftretenden Punkte,

O_2 wird bestimmt über 2 Anordnungseigenschaften: Spezielle Lage der Punkte auf fiktiven, konzentrischen Kreisen, Verhältnisse der Radien der fiktiven Kreise.

(3) C_3 = Anzahl der auftretenden Flächen,

O_3 wird bestimmt über 1 Anordnungseigenschaft: Äquivalenz von Flächen.

Hier könnte die makroästhetische Analyse abgebrochen werden, die sich nach Definition mit der Rosette als Ganzes befaßt. Innerhalb dieser Rosetten treten jedoch besondere Rosenlinien (Abb. 2) als zusammengesetzte Teilgebilde auf, die selbst wieder einer makroästhetischen Analyse nach den obigen Aspekten unterzogen werden können. Eine solche Betrachtungsweise führt sukzessive von einfachen Ausgangselementen durch Superisation zu immer komplexeren Elementen bis hin zur Gesamtrosette. Dies soll exemplarisch an den folgenden Aspekten erörtert werden. Beispiele für solche Rosenlinien Rl zeigt Abb. 2; werden diese nach dem 1. Aspekt analysiert, gilt:

Typen	A	B										C
Rosenlinien (Rl)												
$M_{Ä1}$(Rl) mb	5oo	417	296	186	186	186	186	148	115	93	93	61
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

Abb. 2

(4) C_1 (Rl) = Anzahl der Kreisbogenstücke einer Rosenlinie;

O_1 (Rl) wird bestimmt über 3 Anordnungseigenschaften: Rotationssymmetrie E_{41}, einfach geschlossener Linienzug E_{42}, Äquivalenz von Kreisbogenstücken E_{43}. (Der 1. Index bezeichnet den betreffenden Aspekt, während sich der 2. Index auf die unterschiedlichen Anordnungseigenschaften bezieht.)

Aus C_1 (Rl) und O_1 (Rl) ergeben sich für jede Rosenlinie ein $M_{Ä1}$ (Rl) -(vgl. Abb. 2). Als makroästhetisches Maß im 4. Aspekt wird

$M_{Ä4} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{k=h} M_{Ä1} (Rl_k)$ berücksichtigt, wobei $k = 1, 2, \ldots, h$ ist

und h die Anzahl der effektiv auftretenden Rosenlinien angibt. Durch O_1 (Rl) lassen sich Bedingungen formulieren für das, was besondere Rosenlinien sind. Es ergeben sich 3 verschiedene Typen, nämlich:

A: $E_{41} = E_{42} = E_{43} = 1$ (Kreis als Zusammensetzung zweier Kreisbogen, Abb.2,a)

B: $E_{41} = \frac{C-1}{C}$ oder $\frac{C-2}{C}$ und $E_{42} = E_{43} = 1$ (z.B. Abb.2 b, c, ..., j, k)

C: $E_{41} = \frac{C-3}{C}$ und $E_{42} = 1$ und $E_{43} = \frac{C-2}{C-1}$ (z.B. Abb. 2, 1)

Statt C_1 (Rl) ist hier einfach als Abkürzung C geschrieben.

Die im 4. Aspekt thematisierten Rosenlinien können jetzt selbst wieder als Komplexitätselemente der Rosetten als Ganzes interpretiert werden. Es ist:

(5) C_5 = Anzahl der auftretenden Rosenlinien (vgl. (4)),

O_5 wird bestimmt über 6 Anordnungseigenschaften: Äquivalenz von Rosenlinien; konzentrische Lage der Rosenlinien; Lage der Rosenlinien auf fiktiven, konzentrischen Kreisen; Zusammenhang von Rosenlinien; Rotationssymmetrie; Drehung von Rosenlinien im Zentrum des Randkreises.

Durch die Rosenlinien (vgl. (4)) werden gleichzeitig Rosenflächen bestimmt, die wiederum als Komplexitätselemente aufgefaßt werden können. Dabei werden nur solche Rosenflächen berücksichtigt, die nicht überschnitten sind.

(6) C_6 = Anzahl der auftretenden Rosenflächen,

O_6 wird bestimmt über 6 Anordnungseigenschaften, sie entsprechen den bei (5) genannten.

Die Rosenlinien, die im 4. Aspekt betrachtet werden, stellen die Komplexitätselemente des 5. Aspektes dar. Durch die Definition von Rosenlinien werden somit nicht nur solche Kombinationen aus Kreisbogenstücken bestimmt, die im 4. Aspekt einen $M_{\ddot{A}}$-Beitrag liefern, sondern auch gleichzeitig Komplexitätselemente für einen weiteren 5. Aspekt festlegt. Damit stellt sich die Frage nach Kriterien für das, was als Komplexitätselement aufzufassen ist - vielleicht könnten dafür mit Hilfe der Semiotik explizite Superisations- bzw. Zerlegungsregeln angegeben werden. Hier soll lediglich auf das Problem hingewiesen werden. Damit wird aber gleichzeitig deutlich, daß der theoretische Anspruch der "vollständigen makroästhetischen Analyse" bei der effektiven Anwendung nicht erfüllt werden kann, da die makroästhetische Analyse hier in eine mikroästhetische Analyse übergeht.

Da die Bestimmung der Komplexitätselemente und Anordnungseigenschaften, mit denen die Beschreibung ästhetischer Objekte vorgenommen wird, von der ästhetischen Familie abhängt, taucht die schon genannte Schwierigkeit in ähnlicher Weise bei dem Versuch wieder auf, die ästhetische Familie explizit einzugrenzen. Bei der Begrenzung der Rosettenfamilie (Menge ähnlicher ästhetischer Objekte) werden Merkmale angegeben, die sich sowohl auf die Komplexität als auch auf die Anordnung beziehen (vgl. Abb. 3). Die dort formulierten Merkmale sind die notwendige Bedingung dafür, daß ein Gebilde zur ästhetischen Familie gehört, alle übrigen Gebilde (mit " - " gekennzeichnet) werden ausgeschlossen. Als Komplexitätselemente der Rosetten werden Kreise und Kreisbogen genannt. Diese Elemente können selber wieder als Anordnung von Elementen betrachtet werden, so daß dann die Kreise und Kreisbogen als Superzeichen auftreten würden. An dieser Stelle zeigt sich wiederum, daß die endgültige Festsetzung eines "Urelements", eines "Anfangs" nicht möglich ist, bzw. kein sinnvolles Kriterium dafür im Bereich der Maßästhetik formuliert werden kann. Eine praktikable Familiendefinition läßt sich nur in bezug auf den jeweiligen Zweck, in bezug auf eine mögliche Anwendung angeben.

Die Maßzahlen $M_{\ddot{A}i}$ und das "makroästhetische Gesamtmaß $M_{\ddot{A}}$" (S. Maser, 1970, S. 37) zeigt Abb. 1. Die Rosetten 4, 5, 6 besitzen des gleiche Gesamtmaß $M_{\ddot{A}}$.

Durch die Begriffe Gestalthöhe und Gestaltreinheit soll nun eine zusätzliche Differenzierung erarbeitet werden. Zunächst zur Gestalthöhe. Gestalthöhe läßt sich jetzt in jedem angegebenen Aspekt diskutieren. Definiert man $GH_i = O_i \cdot C_i$ für jeden

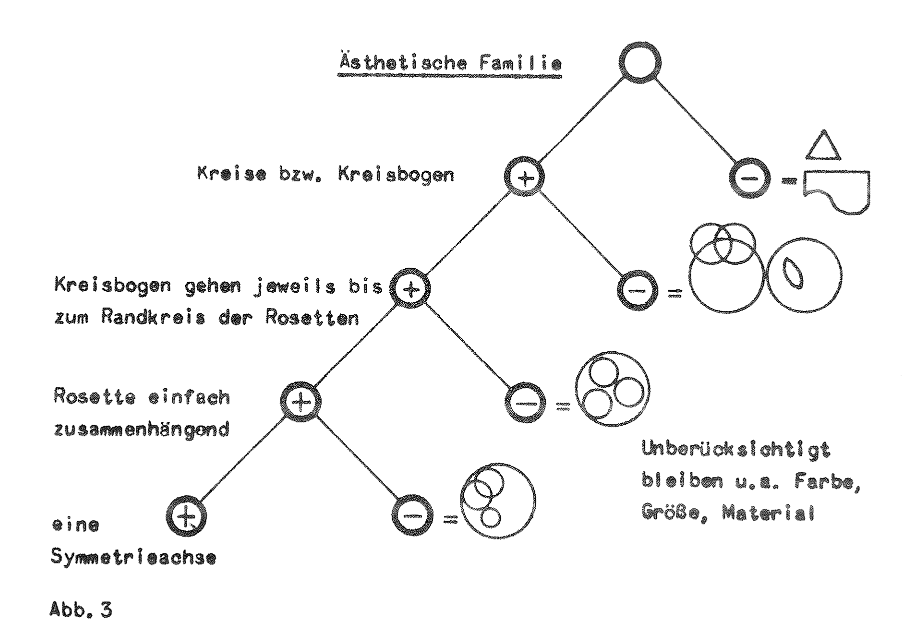


Abb. 3

Aspekt i, dann geht in das Maß GH_i zwar die Anzahl der Elemente, der Grad der realisierten Ordnung, nicht aber die Anzahl der vorhandenen unterschiedlichen Elemente und unterschiedlichen Anordnungseigenschaften ein. Wird aber nur die Anzahl der Elemente überhaupt in GH_i berücksichtigt, dann ist der "Sandhaufen" ein wesentlich gestalthöheres Gebilde als die "Rose". Bei Ehrenfels (1916, S. 44) ist jedoch die Rose im Gegensatz zum Sandhaufen ein Paradigma für ein gestalthohes Gebilde. Dies bedeutet, daß die obige Definition nicht die Ehrenfelssche Argumentation widerspiegelt und daß die in der Einleitung vorläufig formulierte Größe $GH = O \cdot C$ bei einer eingehenderen Betrachtung fragwürdig wird.

Um eine präzisere Definition für die Gestalthöhe zu finden, muß die Klassifizierung der für die Komplexität relevanten Merkmale über die Unterscheidung von Sorten und über die Feststellung der Anzahl innerhalb einer Sorte auftretender Komplexitätselemente hinaus, weiter differenziert und berücksichtigt werden. Dies sei beispielhaft am 3. Aspekt gezeigt.

Die Komplexitätselemente einer bestimmten Sorte - die Flächen - sind zu einer Menge zusammengefaßt, deren Mächtigkeit seither allein zur Bestimmung eines charakte-

risierendes Maßes herangezogen wurde. Diese Menge der Flächen läßt sich in die Teilmengen der konkaven, konvexen und konvex-konkaven Flächen aufteilen. Die so gewonnenen 3 Teilklassen stellen die Elemente der Menge der unterschiedlich gewölbten Flächen dar. Jede Teilklasse kann nun dadurch weiter differenziert werden, daß die kongruenten Flächen der einzelnen Teilklassen jeweils zu einer neuen Teilklasse zusammengestellt werden. Auf diese Weise entstehen die sogenannten Komplexitätsrelevanzen $\mathbb{R}^{(1)}_{C3}$, $\mathbb{R}^{(2)}_{C3}$, $\mathbb{R}^{(3)}_{C3}$. Der hochgestellte Index kennzeichnet die Stufe der Differenzierung. Diese Teilklassenbildung ist für die Rosette Nr. 1 in Abb. 4 angegeben. Die quantitative Erfassung der Komplexitätsrelevanz erfolgt generell für die k. Stufe im

		Komplexitätsrelevanzen $\lvert\mathbb{R}^{(k)}_{C3}\rvert = R^{(k)}_{C3}$	
Differenzierendes Merkmal:	$\{\mathbb{C}_3\} = \{\{a,b,c,d,e,f,g,\}\}$	$= \mathbb{R}^{(1)}_{C3}$	$R^{(1)}_{C3} = 1$
1. Wölbung: konvex, konkav, Mischung	$\{a\}$ $\{\ \}$ $\{b,c,d,e,f,g\}$	$\mathbb{R}^{(2)}_{C3} = \{\{a\}, \{b,c,d,e,f,g\}\}$	$R^{(2)}_{C3} = 2$
2. Kongruenz	$\{a\}$ $\{e,f,g\}$ $\{b,c,d\}$	$\mathbb{R}^{(3)}_{C3} = \{\{a\}\ \{e,f,g\}\ \{b,c,d\}\}$	$R^{(3)}_{C3} = 3$
	a e f g b c d	$\mathbb{C}_3 = \{a,b,c,d,e,f,g\}$	$C_3 = 7$

Abb. 4: Komplexitätsrelevanz $R^{(k)}_{C3}$ für die Rosette Nr. 1

Aspekt i durch $\lvert \mathbb{R}^{(k)}_{Ci} \rvert = R^{(k)}_{Ci}$, dabei gilt $R^{(k)}_{Ci} \leqq R^{(k')}_{Ci}$ für $k < k'$ (vgl. Abb. 4, rechte Spalte). Eine analoge Klassifizierung läßt sich für die übrigen Aspekte erstellen, ausgenommen der 2. Aspekt. Eine Zusammenstellung zeigt Abb. 5.

In ähnlicher Weise lassen sich die Anordnungseigenschaften, mit denen die Anordnung der Komplexitätselemente in den einzelnen Aspekten beschrieben wird, klassifizieren. Die Aufteilung der Gesamtkomplexität in einzelne Aspekte entspricht, was den Grad der Allgemeinheit betrifft, der Gliederung der Anordnungseigenschaften E_{ij} nach dem Gesichtspunkt, ob sie sich auf die Metrik, die Lage, die Topologie des zu beschreibenden Objektes beziehen. In der nächsten Stufe läßt sich beispielsweise die Teilklasse der Anordnungseigenschaften, durch die die allgemeine Lage charakterisiert wird, aufspalten: die Symmetrie-Eigenschaften, die Verhältnis-Eigenschaften und die Eigenschaften, welche die besondere Lage beschreiben, werden jeweils in neue Teilklassen zusammengefaßt. Die für die Beschreibung der Anordnung im 1. Aspekt wichtigen Mengen - Anordnungsrelevanzen $\mathbb{R}^{(k)}_{O1}$ genannt - sind aus Abb. 6 zu ersehen. Alle Anordnungsre-

	1. Aspekt	2. Aspekt	3. Aspekt	4. Aspekt	5. Aspekt	6. Aspekt
$IR^{(1)}_{Ci}$	Linien	Punkte	Flächen	Kreisbogenstücke der Kombinationen von Linien (Rosenlinien)	Rosenlinien	Rosenflächen
$IR^{(2)}_{Ci}$	gerade gekrümmt	---	konvex konkav Mischung	konvex konkav	A (Rosenlinien- B Typen siehe C Abb. 2)	A (Rosenlinien- B Typen siehe C Abb. 2)
$IR^{(3)}_{Ci}$	Kreis Kreisbogen	---	Kongruenz, Menge der unterschiedlichen Flächen	Kreisbogenstücke, auf gleichen Kreisbogen, Menge der Kreisbogenstücke die auf unterschiedlichen Kreisbogen liegen	Ähnlichkeit, Menge der nicht ähnlichen Rosenlinien	Ähnlichkeit, Menge der nicht ähnlichen Rosenflächen
C_i	Menge der Kreise, bzw. Kreisbogen	Menge der Punkte	Menge der Flächen	Menge der Kreisbogenstücke	Menge der Rosenlinien	Menge der Rosenflächen

Abb. 5: Komplexitätsrelevanz $IR^{(k)}_{C_i}$: Angabe der Mengen bzw. der differenzierenden Merkmale für die Teilklassenbildung

Lage $\{IE_{12}, IE_{16}\}$			Metrik $\{IE_{11}\}$	Topologie $\{IE_{18}\}$	Ordnungsrelevanzen	$\lvert IR^{(k)}_{01}\rvert = R^{(k)}_{01}$
Symmetrie $\{IE_{12}\}$	Verhältnis $\{\ \}$	bes.Lage $\{IE_{16}\}$	Äquivalenz $\{IE_{11}\}$	Liniennetz $\{IE_{18}\}$	$IR^{(1)}_{01} = \{\{IE_{12}, IE_{16}\}, \{IE_{11}\}, \{IE_{18}\}\}$	$R^{(1)}_{01} = 3$
IE_{12}		IE_{16}	IE_{11}	IE_{18}	$IR^{(2)}_{01} = \{\{IE_{12}\}, \{IE_{16}\}, \{IE_{11}\}, \{E_{18}\}\}$	$R^{(2)}_{01} = 4$
$\frac{2}{3}$		1	$\frac{2}{3}$	1	$IR^{(3)}_{01} = \{IE_{11}, IE_{12}, IE_{16}, IE_{18}\}$	$R^{(3)}_{01} = 4$
					$O_1 = \sum_{j=1}^{j=9} E_{1j} = 3,33$	

Abb. 6: Ordnungsrelevanzen $R^{(k)}_{01}$ für die Rosette Nr. 1

levanzen für die übrigen Aspekte lassen sich aus Abb. 7 erarbeiten. In der 1. und 2. Stufe, also auf allgemeinerer Ebene, wird keine Unterscheidung nach Aspekten vorgenommen (vgl. Abb. 7); denn Eigenschaften, mit denen beispielsweise die Lage, die Symmetrie beschrieben wird, treten in verschiedenen Aspekten auf. Allgemein gilt im Gegensatz zum Bereich der Komplexität:

$$IR^{(1)}_{Oi} \cap IR^{(1)}_{Oi'} \neq \emptyset; \quad IR^{(2)}_{Oi} \cap IR^{(2)}_{Oi'} \neq \emptyset \quad \text{für } i \neq i',$$

wegen der fortschreitenden Differenzierung gilt für die 3. Stufe jedoch:

$$IR^{(3)}_{Oi} \cap IR^{(3)}_{Oi'} = \emptyset \qquad \text{für } i = i'.$$

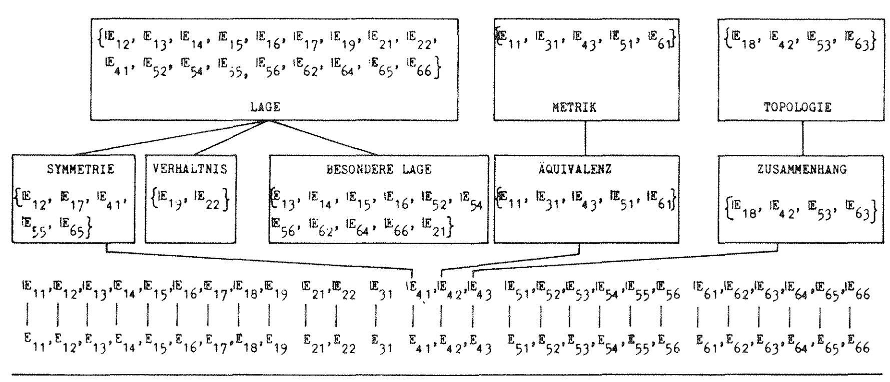


Abb. 7

Die quantitative Erfassung der $\mathbb{R}^{(k)}_{Oi}$ erfolgt durch Maßzahlen $R^{(k)}_{Oi}$, die gleich der Anzahl der Elemente der Menge $\mathbb{R}^{(k)}_{Oi}$ (Mächtigkeit) sind.

Ausgangspunkt für die differenzierende Betrachtung der Anordnungs- und Komplexitätsbereiche war der Versuch, den Begriff der Gestalthöhe quantitativ zu präzisieren. Weiter oben wurde schon darauf hingewiesen, daß es für die Rosetten keinesfalls ausreicht, als Gestalthöhe das Produkt $O_i \cdot C_i$ anzugeben. Aufgrund der Klassifikation ist dieses Produkt nun lediglich als quantitatives Maß für die Gestalthöhe der 4. Stufe zu interpretieren. Entsprechend dazu läßt sich auf jeder weiteren Stufe eine Maßzahl $R^{(k)}_{Oi} \cdot R^{(k)}_{Ci}$ ($k = 1,2,3$) für die Gestalthöhe einführen (vgl. Abb.8). Das heißt beispielsweise für die Rosetten im 5. Aspekt: je größer die Anzahl der unterschiedlichen Rosenlinien ($R^{(3)}_{C5}$), je größer die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungseigenschaften ($R^{(3)}_{O5}$) ist, die einen Beitrag zum O_5 liefern, desto größer ist das Maß für die Gestalthöhe $GH^{(3)}_5$; je größer die Anzahl der unterschiedlichen Arten von Rosenlinien ($R^{(2)}_{C5}$), je größer die Anzahl der unterschiedlichen Arten von Anordnungseigenschaften ($R^{(2)}_{O5}$) ist, desto größer wird das Maß für die Gestalthöhe $GH^{(2)}_5$. Die Grö-

Stufe		BIRKHOFF-Maß	Gestalthöhe			Gestaltreinheit
1	$R_{Oi}^{(1)}, R_{Ci}^{(1)}$	$M_{Äi}^{(1)} \sim \frac{R_{Oi}^{(1)}}{R_{Ci}^{(1)}} = K_{Mi}$	$GH_i^{(1)} \sim R_{Oi}^{(1)} R_{Ci}^{(1)} = K_{GHi}$			
				$GH_i^{(1,2)} \sim R_{Oi}^{(2)} R_{Ci}^{(2)} K_{GHi}$		$GR_i^{(1,2)} \sim \frac{R_{Oi}^{(2)}}{R_{Ci}^{(2)}} \frac{R_{Oi}^{(2)}}{K_{GHi}}$
2	$R_{Oi}^{(2)}, R_{Ci}^{(2)}$	$M_{Äi}^{(2)} \sim \frac{R_{Oi}^{(2)}}{R_{Ci}^{(2)}}$	$GH_i^{(2)} \sim R_{Oi}^{(2)} R_{Ci}^{(2)}$			
					$GH_i^{(1,2,3)}$	
				$GH_i^{(2,3)} \sim R_{Oi}^{(2)} R_{Ci}^{(2)} R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}$		$GR_i^{(2,3)} \sim \frac{R_{Oi}^{(3)}}{R_{Ci}^{(3)}} \frac{R_{Oi}^{(3)}}{R_{Oi}^{(2)} R_{Ci}^{(2)}}$
3	$R_{Oi}^{(3)}, R_{Ci}^{(3)}$	$M_{Äi}^{(3)} \sim \frac{R_{Oi}^{(3)}}{R_{Ci}^{(3)}}$	$GH_i^{(3)} \sim R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}$			
					$GH_i^{(2,3,4)}$	
				$GH_i^{(3,4)} \sim R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)} O_i \; C_i$		$GR_i^{(3,4)} \sim \frac{O_i}{C_i} \frac{O_i}{R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}}$
4	O_i, C_i	$M_{Äi}^{(4)} \sim \frac{O_i}{C_i}$	$GH_i^{(4)} \sim O_i \; C_i$			

Abb. 8

ßen $R_{Oi}^{(1)}$ und $R_{Ci}^{(1)}$ sind für alle Rosetten der Familie konstant, d.h., daß das Produkt aus diesen Maßzahlen für jede Rosette gleich und damit ungeeignet ist, die Rosetten innerhalb der Familie zu unterscheiden; vielmehr ist diese Größe charakteristisch für die angegebene Familie. Es ist also $R_{Oi}^{(1)} \cdot R_{Ci}^{(1)} = K_{GHi}$, für $i = 1,2,\ldots,6$.

Nach Ehrenfels (1916, S. 44) kann die Gestalthöhe über jede beliebige Grenze hinaus gesteigert werden. Das kann theoretisch nach der hier vorgenommenen Festlegung auf zweifache Weise geschehen, nämlich entweder durch Steigerung von C_i, $R_{Ci}^{(k)}$ oder durch Steigerung von O_i, $R_{Oi}^{(k)}$.

Die GH-Werte der einzelnen Aspekte liefern jeweils einen Beitrag zur Gesamt-Gestalthöhe einer Rosette. Damit jedoch kein Aspekt gegenüber einem anderen bevorzugt wird, ist es vorteilhaft, die Größen $R_{Oi}^{(k)} \cdot R_{Ci}^{(k)}$ auf Werte zwischen 0 und 1 zu normieren. Es gilt allgemein:

$$GH_i^{(k)} \sim R_{Oi}^{(k)} \cdot R_{Ci}^{(k)} \quad \text{oder} \quad GH_i^{(k)} = q_i \cdot R_{Oi}^{(k)} R_{Ci}^{(k)} + K_i$$

Die Größen $R_{Oi}^{(k)}$, $R_{Ci}^{(k)}$ sind abhängig von der Familie; werden sie gleich null,

entsteht $GH_i^{(k)} = K_i$. Die Werte K_i können wiederum als Kenngrößen der Familie aufgefaßt werden. Da hier lediglich eine Beschreibung innerhalb der Familie angestrebt wird, kann K_i gleich null gesetzt werden. Es gilt:

$$0 \leqq GH_i^{(k)} \leqq \text{Max}\,(GH_i^{(k)})$$

Für $k = 1,2,3,4$ ist das Maximum von $GH_i^{(k)}$ effektiv bestimmt durch die bei der Differenzierung berücksichtigten Merkmale. q_i wird so gewählt, daß gilt:

$$0 \leqq GH_i^{(k)} \leqq 1; \text{ damit ist } \quad q_i = \frac{1}{\text{Max}\,(R_{Oi}^{(k)}) \cdot \text{Max}\,(R_{Ci}^{(k)})}$$

So entsteht als Maß für die Gestalthöhe eines Teilaspektes i auf der k. Stufe

$$GH_i^{(k)} = \frac{R_{Oi}^{(k)} \cdot R_{Ci}^{(k)}}{\text{Max}\,(R_{Oi}^{(k)}) \cdot \text{Max}\,(R_{Ci}^{(k)})}$$

$\text{Max}\,(R_{Oi}^{(k)})$, $\text{Max}\,(R_{Ci}^{(k)})$ hängen von der Familie bzw. vom Grad der Präzision der Klassifizierung ab.
Da alle m Aspekte durch die Normierung gleichrangig behandelt werden, kann als Gesamtmaß für die Gestalthöhe $GH^{(k)}$ in Analogie zur Bestimmung eines "makroästhetischen Gesamtmaßes" (S. Maser, 1970, S. 37) die normierte Summe aller $GH_i^{(k)}$ eingeführt werden. Es gilt dann

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{i=m} GH_i^{(k)} \leqq m$$

Um zu erreichen, daß $GH^{(k)}$ ebenfalls zwischen 0 und 1 liegt, muß die normierende Konstante 1/m hinzugefügt werden. Somit gilt für die 2. und 3. Stufe:

$$GH^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} GH_i^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{R_{Oi}^{(k)} \cdot R_{Ci}^{(k)}}{\text{Max}\,(R_{Oi}^{(k)}) \cdot \text{Max}\,(R_{Ci}^{(k)})}$$

und speziell für die 4. Stufe

$$GH^{(4)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{O_i \cdot C_i}{n_i \cdot \mathrm{Max}\,(C_i)} \text{, wobei } \mathrm{Max}\,(O_i) = \mathrm{Max}\,(R^{(3)}_{Oi}) = n_i \text{ ist.}$$

Geht man von der Überlegung aus, daß die Gestalthöhe im i. Aspekt der Rosetten proportional zu O_i, C_i, $R^{(k)}_{Oi}$, $R^{(k)}_{Ci}$ wächst, dann läßt sich z.B. für die 3. und 4. Stufe ein etwas anders geartetes Maß für die Gestalthöhe bestimmen: $GH^{(3,4)}_i \sim O_i\, C_i\, R^{(3)}_{Oi}\, R^{(3)}_{Ci}$; analog läßt sich das für die 2. und 3. bzw. 1. und 2. Stufe durchführen (vgl. Abb. 8). Darüberhinaus besteht die Möglichkeit, im i. Aspekt die Größen von 3 Stufen zusammenziehen. Durch ein solches zusammenfassendes Maß kann jedoch die stufenbezogene Differenzierung wieder ausgeglichen werden. Es ist deshalb von Fall zu Fall in bezug auf den Zweck der Analyse zu entscheiden, inwieweit es sinnvoll ist, die erarbeitete Differenzierung zugunsten der Übersichtlichkeit, die weniger viele oder ein einzelnes Maß bieten, wieder aufzuheben.

Für die hier vorliegenden Rosetten wurden lediglich $GH^{(3,4)}$-Werte berechnet (vgl. Abb. 8, 9). Soviel zur Gestalthöhe; jetzt gilt es, den Begriff Gestaltreinheit entsprechend zu präzisieren.

NR.	$GH^{(3,4)}_1$	$GH^{(3,4)}_2$	$GH^{(3,4)}_3$	$GH^{(3,4)}_4$	$GH^{(3,4)}_5$	$GH^{(3,4)}_6$	$GH^{(3,4)}$	$GR^{(3,4)}_1$	$GR^{(3,4)}_2$	$GR^{(3,4)}_3$	$GR^{(3,4)}_4$	$GR^{(3,4)}_5$	$GR^{(3,4)}_6$	$GR^{(3,4)}$
1	1o9	4o	77	72	27	14	57	39	54	21	192	16	37	6o
2	179	148	97	56	7	4o	88	73	38	4o	5oo	68	7o	132
3	78	183	461	245	69	426	244	14	16	6	145	7	7	33
4	2o6	58	112	124	43	14	93	36	46	21	185	12	37	56
5	285	74	212	79	64	223	156	39	29	17	188	15	26	52
6	76	74	145	1o7	28	166	99	44	39	19	384	17	17	87

Abb. 9

In der gleichen Weise wie eine Gestalthöhe auf jeder Stufe der Beschreibung angegeben wurde, kann auch ein Birkhoff-Maß $M^{(k)}_{\ddot{A}i} \sim R^{(k)}_{Oi} / R^{(k)}_{Ci}$ für jede Stufe formuliert werden. Es ist dann entsprechend

$$M^{(k)}_{\ddot{A}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} M^{(k)}_{\ddot{A}i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\text{Max}\,(R^{(k)}_{Oi})} \cdot \frac{R^{(k)}_{Oi}}{R^{(k)}_{Ci}}$$

und damit $0 \leqq M^{(k)}_{\ddot{A}} \leqq 1.$

Speziell für die 4. Stufe entsteht dann ein Birkhoff-Maß, wie es S. Maser (1967) erstmals definiert hat (vgl. auch S. Maser, 1970, S. 37). Speziell für die 1. Stufe entsteht ein konstanter Wert K_{Mi} als charakteristische Größe der Familie (vgl. Abb. 8).

Nach Ehrenfels (1916, S. 45) sind insbesondere die "mathematisch genauen regelmäßigen Polyeder" gestaltreine Gebilde, also gerade jene einfachen Objekte, bei denen eine hohe Ordnung über wenige, gleichartige, einheitliche Elemente realisiert ist, und zwar so, daß relativ wenig verschiedenartige Anordnungseigenschaften einen hohen Beitrag zum Ordnungsgrad beisteuern. Soll dies in einen quantitativ präzisierten Begriff von Gestaltreinheit eingehen, so müssen die Überlegungen zum Birkhoff-Quotienten ergänzt werden durch die Bemerkung von Ehrenfels, daß die mathematisch regelmäßigen Gebilde "von relativ geringer Gestaltungshöhe" sind. Wenn man nun in bezug auf die Rosetten für die 4. Stufe der Betrachtung von der Vorstellung ausgeht, daß die Gestaltreinheit proportional zu O_i / C_i wächst, wie müßte dann eine Korrektur dieser ersten Überlegung aussehen, bzw. welche Gestalthöhe der 4 Stufen geht als präzisierende Größe in das Maß der Gestaltreinheit ein? Zieht man als Ergänzung hinzu, daß die Gestaltreinheit der 4. Stufe mit größerem $GH^{(4)}_i$ ($= O_i \cdot C_i$) geringer wird, zieht man also nur charakteristische Größen der 4. Stufe heran, dann entsteht

$$GR^{(4)}_i \sim \frac{O_i}{C_i} \quad \text{und } GR^{(4)}_i \sim \frac{1}{O_i \cdot C_i} \quad \text{oder } GR^{(4)}_i \sim \frac{1}{C^2_i}$$

Mit einem solchen Maß wird jedoch lediglich die triviale Tatsache ausgedrückt, daß die zu beschreibenden Objekte um so gestaltreiner sind, je geringer die Anzahl der Elemente ist, aus denen sie bestehen. Das für die Gestaltreinheit wichtige Merkmal der Ordnung geht überhaupt nicht in das Maß ein, ebensowenig die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungseigenschaften,

sowie die Zahl der unterschiedlichen Elemente, d.h., daß ein genaueres Maß für die Gestaltreinheit sich nicht allein auf eine Stufe beziehen kann. Nimmt man dagegen den Quotienten $O_i/R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}$ als korrigierenden Faktor für die quantitative Erfassung der Gestaltreinheit hinzu, so entsteht für die Gestaltreinheit der 3. und 4. Stufe (vgl. Abb. 8)

$$GR_i^{(3,4)} \sim \frac{O_i}{C_i} \quad \text{und} \quad GR_i^{(3,4)} \sim \frac{O_i}{R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}}$$

$$\text{oder} \quad GR_i^{(3,4)} = p_i \cdot \frac{O_i}{C_i} \cdot \frac{O_i}{R_{Oi}^{(3)} R_{Ci}^{(3)}} + P_i$$

Ein solches Maß für Gestaltreinheit wächst mit steigendem Verhältnis von Ordnung zu Komplexität und mit steigendem Verhältnis von Ordnung zur Anzahl der unterschiedlichen Anordnungseigenschaften und der Anzahl der unterschiedlichen Elemente. Damit wird auch dem Grad der Ordnung ein größeres Gewicht beigemessen als beim Birkhoff-Maß.

Da wiederum nur innerhalb der Familie verglichen wird, ergibt sich analog: $P_i = 0$, $p_i = 1/n_i$ bzw. $p_i = 1/\mathrm{Max}\,(R_{Oi}^{(k)})$. Wie bei den $M_{\ddot{A}}$- und GH-Werten können nun für alle Aspekte $GR_i^{(3,4)}$-Werte bestimmt werden, die jeweils einen Beitrag zur Gesamt-Gestaltreinheit liefern. Es ist $GR^{(3,4)}$ wiederum die normierte Summe der $GR_i^{(3,4)}$, also

$$GR^{(3,4)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} GR_i^{(3,4)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{O_i}{n_i C_i} \cdot \frac{O_i}{R_{Oi}^{(3)} \cdot R_{Ci}^{(3)}}$$

Analog dem Vorgehen bei der Gestalthöhe kann auch für die weiteren Stufen ein Maß für die Gestaltreinheit eingeführt werden (vgl. Abb. 8).

Die Möglichkeiten einer differenzierten Beschreibung lassen sich abschätzen, wenn wir die Rosetten Nr. 4, 5, 6 vergleichen, die alle die gleichen $M_{\ddot{A}}^{(4)}$-Werte (vgl. Abb. 1), jedoch unterschiedliche $GR^{(3,4)}$ - und $GH^{(3,4)}$ -Werte haben (vgl. Abb. 9). Die Unterschiede in den GR- und GH-Maßzahlen entstehen hauptsächlich durch unterschiedliche C_i und $R_{Ci}^{(3)}$. In der Familie ist deshalb zwischen den GR- und GH-Maßzahlen eine gewisse Gegenläufigkeit festzustellen. Dies wird insbesondere deutlich in der Zusammenstellung der Maßzahlen verschiedener Rosetten in Abb. 10. Diese Abbildung zeigt nur einen Ausschnitt einer größeren Menge von untersuchten Rosetten, der insbesondere die Rosetten Nr. 1, 2, 4 und 6 aus Abb. 1 angehören.

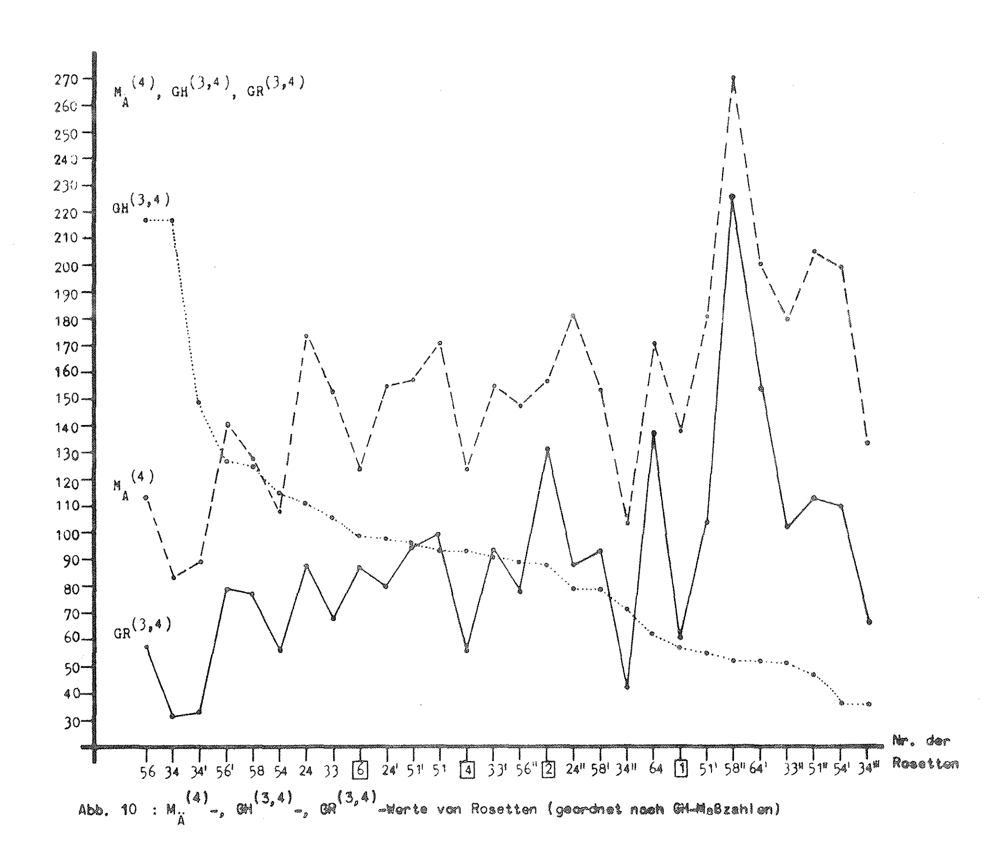


Abb. 10 : $M_{\ddot{A}}^{(4)}$-, $GH^{(3,4)}$-, $GR^{(3,4)}$-Werte von Rosetten (geordnet nach GH-Maßzahlen)

Abb. 10 scheint zunächst die Gegenläufigkeit von Gestalthöhe und Gestaltreinheit zu bestätigen (GH fällt, GR steigt), ferner die Parallelität von Gestaltreinheit und Birkhoff-Maß. Dies soll vor einer vorschnellen Verallgemeinerung am Birkhoffschen Beispiel der Polygone (vgl. S. Maser, 1970, S. 38 f) diskutiert werden (vgl. Abb. 11).

Wird $R_{O1}^{(3)}$ wie bei den Rosetten als Anzahl der überhaupt realisierten Anord-

E_{11} = Vertikalsymmetrie

E_{12} = Horizontalsymmetrie

E_{13} = Rotationssymmetrie

E_{14} = Parallelität

E_{15} = Gleichheit von Strecken

E_{16} = Gleichheit von Winkeln

$$M_{Ä1} = \frac{O_1}{n_1 C_1} = \frac{\sum_{j=1}^{j=6} E_{1j}}{6\ C_1}$$

C_1 = Anzahl der Polygonseiten

$$E_{11} = \begin{cases} 1, & \text{falls Vertikalsymmetrie vorliegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E_{12} = \begin{cases} 1, & \text{falls Horizontalsymmetrie vorliegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E_{13} = \frac{360° - \alpha}{360°},$$ α: der kleinste Drehwinkel, um den die Figur wieder mit der Ausgangsposition deckungsgleich ist

$$E_{14} = \frac{2p}{C},$$ p : Anzahl der auftretenden Parallelenpaare

$$E_{15} = \frac{C - t}{C - 1},$$ t : Anzahl der verschieden auftretenden Längen

$$E_{16} = \frac{C - w}{C - 1},$$ w : Anzahl der verschieden auftretenden Winkel

	C_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	O_1	$R_0^{(3)}$	$M_Ä$	GR	GH
QUADRAT	4	1	1	3/4	1	1	1	5,75	6	240	230	138
RECHTECK	4	1	1	1/2	1	2/3	1	5,167	6	215	185	124
GLEICHSEITIGE DREIECK	3	1	-	2/3	-	1	1	3,667	4	204	187	44
SECHSECK	6	1	1	5/6	1	1	1	5.833	6	162	157	210
RAUTE	4	-	-	1/2	1	1	2/3	3,167	4	132	105	51
FUNFECK	5	1	-	4/5	-	1	1	3,8	4	127	121	76
PARALLELOGRAMM	4	-	-	1/2	1	2/3	2/3	2,833	4	118	84	45
GLEICHSCH. TRAPEZ	4	1	-	-	2/4	1/3	2/3	2,5	4	104	65	40
DRACHEN	4	1	-	-	-	2/3	1/3	2,0	3	83	55	24
TRAPEZ	4	-	-	-	2/4	-	-	0,5	1	21	11	2
ALLGEMEINES VIERECK	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

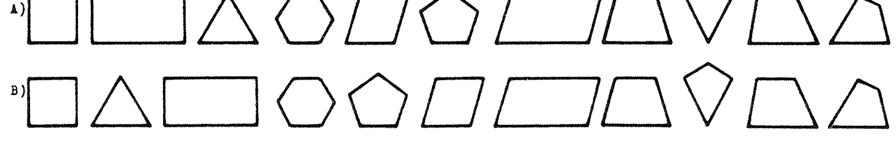


Abb. 11: A) Rangfolge der Polygone nach $M_Ä$ B) Rangfolge der Polygone nach GR

nungseigenschaften eingeführt und $R^{(3)}_{C1}$ als Anzahl der Arten von Linien bestimmt, die bei den Polygonen auftreten, dann kann auch das Maß für die Gestaltreinheit auf die Polygone angewendet werden. Da nur eine Art von Linien in dieser Familie auftritt, also $R^{(3)}_{C1} = 1$ ist, so entsteht für die ebenen Polygone aus dem weiter oben angegebenen Maß für Gestaltreinheit:

$$GR = \frac{O_1}{n_1 C_1} \cdot \frac{O_1}{R^{(3)}_{O1}}$$

Ordnen wir die Polygone nach $M_{\ddot{A}}$- und GR-Werten (vgl. Abb. 11), dann ergeben sich für einige Polygone unterschiedliche Rangplätze. Das gleichseitige Dreieck beispielsweise nimmt auf der GR-Skala den zweiten Platz ein, auf der $M_{\ddot{A}}$-Skala den dritten. Dies hat seinen Grund darin, daß beim gleichseitigen Dreieck der Ordnungsbeitrag einzelner Anordnungseigenschaften hoch ist, oder anders ausgedrückt: relativ wenig Anordnungseigenschaften treffen beinahe voll zu. Dieses Verhältnis von Ordnung pro Anordnungseigenschaft geht in diesem Beispiel zusätzlich zu $O_1/n_1 \cdot C_1$ in das Maß für Gestaltreinheit ein. Da sich die meisten Polygone mehr in den O_1-Werten als in den C_1-Werten unterscheiden, kann hinsichtlich der GH- und GR-Maßzahlen keine Gegenläufigkeit festgestellt werden. Beide Maßzahlen sind wesentlich durch O_1 bestimmt. Der Begriff der Gestalthöhe liefert daher kaum eine Möglichkeit einer weiteren Differenzierung. Sind dagegen höchst komplexe Gebilde zu analysieren, treten also hohe C-Maßzahlen auf, so ist eine bessere Differenzierung mit der Gestalthöhe möglich, da beim Birkhoff-Maß in diesem Fall relativ geringe O-Maßzahlen durch hohe C-Maßzahlen zu dividieren sind.

Durch die Einführung von Komplexitäts- und Anordnungsrelevanzen und durch die Betrachtung auf verschiedenen Abstraktions- bzw. Differenzierungsstufen werden die Möglichkeiten erweitert, Beschreibungen mit unterschiedlichem Präzisionsgrad durchzuführen. Eine präzise, d.h. vollständige, eindeutige Analyse liegt nur dann vor, wenn ein System von charakteristischen Maßzahlen nur auf ein Objekt innerhalb der betrachteten Familie zutrifft. Bei einer vollständigen Analyse muß es umgekehrt möglich sein, aus der Kenntnis des Systems charakteristischer Größen, das Objekt wieder eindeutig zu rekonstruieren (S. Maser, 1970,

S. 130). Dies wird in den wenigsten Fällen gelingen, andererseits ist auch immer zu erwägen, welcher Präzisionsgrad der Analyse in bezug auf ihren Zweck sinnvoll ist. In solche Erwägungen, Abschätzungen, Argumentationen fließen unvermeidlich die Ergebnisse der "vorgängigen Wahrnehmung" bzw. Erfahrung und ein "unausgesprochenes Vorverständnis" (J. Habermas, 1970) mit ein. Gerade der Versuch, die Beschreibung zu präzisieren, macht die Stellen deutlich, bei denen die Einstellung, der Zweck der Analyse, die Anwendung in die Beschreibung eingehen.

Birkhoff identifiziert den ästhetischen Wert dogmatisch mit Gestaltreinheit, Ehrenfels einseitig mit Gestalthöhe. Hier war die Wertproblematik explizit ausgeklammert. Gestalthöhe und Gestaltreinheit, sowie alle C_i, O_i, $R^{(k)}_{Ci}$, $R^{(k)}_{Oi}$ sind stets Größen, die allein zur deskriptiven Differenzierung ästhetischer Objekte dienen; sie geben keinen unmittelbaren Aufschluß über die emotionale Bewertung, also über die Beziehung eines Subjektes zum Objekt. Die Präferenzen von Konsumenten , von Künstlern gegenüber ästhetischen Objekten zu bestimmten Zeiten, in einer bestimmten gesellschaftlichen Situation, die Präferenzen von Gesellschaften in bestimmten Epochen gehören zu den Problemen der Wert- und angewandten Ästhetik.

Schrifttumsverzeichnis

Bense, M. — Aesthetica - Einführung in die neue Ästhetik, Baden-Baden, 1965

Birkhoff, G.D. — Aesthetic Measure, Cambridge (Mass.), 1933

Ehrenfels, Chr. v. — Höhe und Reinheit der Gestalt (aus: Kosmogonie 1916, S. 93 - 96)

Ehrenfels, Chr. v. — Über Gestaltqualitäten, 1932

Ehrenfels, Chr. v. — Weiterführende Bemerkungen (aus: Primzahlengesetz, 1922, S. 95 - 112, S.o. S. 11). Alle Ehrenfels-Beiträge in: Gestalthaftes Sehen, hrsg. von F. Weinhandl, Darmstadt, 1967

Habermas, J. — Zur Logik der Sozialwissenschaften, Materialien, Frankfurt, 1970

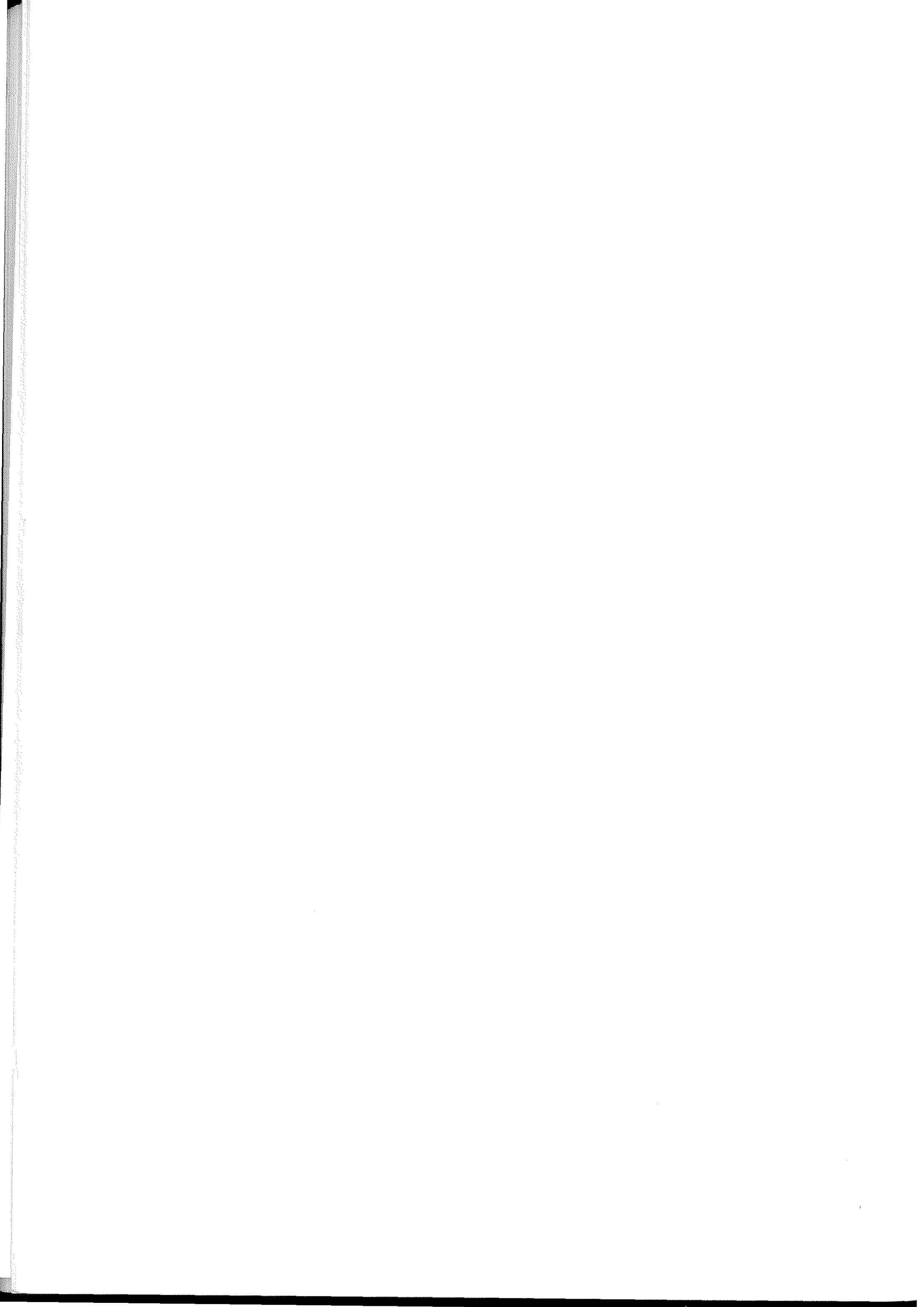
Maser, S. — Numerische Ästhetik, hrsg. v. Institut für Grundlagen der Modernen Architektur, Arbeitsberichte 2, Stuttgart, 1970

Maser, S. Über eine mögliche Präzisierung der Beschreibung ästhetischer Zustände, in: Grundlagen aus Kybernetik und Geisteswissenschaft, Band 8, Quickborn, 1967, S. 101 - 113

Eingegangen am 4. August 1971

Anschrift der Verfasser:
G. Wiesenfarth
725 Leonberg-Eltingen
Alte Ramtelstraße 56

Prof. Dr. S. Maser
3301 Schapen
In den Balken 15



EIN PARADOXON DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG?

von G. Schrage, Hüttental-Weidenau

In dem Buch "Theory and Problems of Probability" von Seymour Lipschutz (1968) findet sich auf Seite 54 die Aufgabe: Ein Mann besucht eine Familie mit zwei Kindern. Eines der Kinder, ein Junge, betritt den Raum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das andere Kind ebenfalls ein Junge ist, falls

1. bekannt ist, daß das andere Kind jünger ist,
2. nichts über das andere Kind bekannt ist?

S. Lipschutz beantwortet die Fragen in folgender Weise:
Der Stichprobenraum für das Geschlecht zweier Kinder ist $S = \{ (J,J), (J,M), (M,J), (M,M) \}$. (Hierbei steht J für Junge und M für Mädchen. Die Stelle innerhalb eines Paares entspricht der Geburtenfolge.) Jedes im Stichprobenraum beschriebene mögliche Auskommen für das Geschlecht zweier Kinder hat die Wahrscheinlichkeit $1/4$.

Sei $A = \{ (J,J) \}$ das Ereignis, daß beide Kinder Jungen sind, $B = \{ (J,J), (J,M) \}$ das Ereignis, daß das ältere Kind ein Junge ist und $C = \{ (J,J), (J,M), (M,J) \}$ das Ereignis, daß eines der Kinder ein Junge ist.

1. Hier ist bekannt, daß Ereignis B eingetreten ist. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Voraussetzung, daß B eingetreten ist, gilt

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} .$$

2. Hier ist bekannt, daß Ereignis C eingetreten ist und wir erhalten

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} .$$

Wenden wir uns zunächst Fall 2 zu.
Der Leser wird vermutlich überrascht sein, daß der Besucher, der einen Jungen der Familie sieht, der Möglichkeit, daß das andere Kind ein Mädchen ist, größere Wahrscheinlichkeit zubilligen soll als der Möglichkeit, daß das andere Kind ebenfalls ein Junge ist. Trügt hier die Intuition oder steckt der Fehler im Beweis?

Daß wohl letzteres zutreffend ist, wird deutlich, wenn wir obige Beweisführung auf einen analogen Fall anwenden:
Gegeben seien drei Urnen U_1, U_2 und U_3. U_1 enthalte 100 weiße Kugeln, U_2 enthalte 50 weiße und 50 schwarze Kugeln und U_3 enthalte 100 schwarze Kugeln.
Es wird zufällig eine der Urnen herausgegriffen. Der Stichprobenraum ist T = $\{ U_1, U_2, U_3 \}$ und es gilt $P(\{U_i\}) = 1/3$ für i = 1,2,3.
Nun werden der gewählten Urne 50 Kugeln entnommen, und man stellt fest, daß alle 50 Kugeln weiß sind. Es ist also das Ereignis $D = \{ U_1, U_2 \}$ eingetreten für das gilt $P(D) = 2/3$.
Daher müßte gelten

$$P(\{U_1\} / D) = \frac{P(\{U_1\} D)}{P(D)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$
$$P(\{U_2\} / D) = \frac{P(\{U_2\} D)}{P(D)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} .$$

Es darf aber wohl angenommen werden, daß kein vernünftiger Mensch eine 50 : 50 Wette eingehen und darauf setzen würde, daß die gewählte Urne U_2 ist.
Das letzte Beispiel läßt aber auch deutlich werden, wo der Fehler steckt. Die Auswahl von 50 Kugeln aus der Urne liefert nämlich nicht nur die Information, daß das Ereignis $D = \{ U_1, U_2 \}$ eingetreten ist, sondern liefert weitergehende Information über den zusammengesetzten Versuch, der darin besteht, zunächst eine der drei Urnen zu wählen und dann 50 Kugeln herauszugreifen.
Dieser zusammengesetzte Versuch hat offenbar $3 \cdot \binom{100}{50}$ gleichwahrscheinliche Ausgänge. Zur vollständigen Beschreibung des Versuches benötigen wir also einen Stichprobenraum mit $3 \cdot \binom{100}{50}$ Elementen. Zu dem Ereignis E, daß nach Beendigung des Experimentes 50 weiße Kugeln vorliegen, gehören $\binom{100}{50} + 1$ Elemente des Stichprobenraumes. Also gilt

$$P(E) = \frac{\binom{100}{50} + 1}{3 \cdot \binom{100}{50}} .$$ Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F, daß U_1 gewählt wurde, gilt $P(F) = 1/3$. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß U_1 gewählt wurde, falls alle 50 gezogenen Kugeln weiß waren, gilt somit

$$P(F/E) = \frac{P(FE)}{P(E)} = \frac{P(F)}{P(E)} = \frac{\binom{100}{50}}{\binom{100}{50}+1} = 1 - \frac{1}{\binom{100}{50}+1} .$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist also nahezu 1.
Das fehlerhafte Ergebnis bei der ersten Rechnung beruhte offenbar darauf, daß ein Großteil der Information, die in dem Ergebnis steckte, daß 50 weiße Kugeln gezogen wurden, nicht verwertet worden ist.
Ähnlich ist die Aufgabe gelagert, von der wir ausgingen. Auch hier liegen zwei Zufallsexperimente vor. Das erste besteht darin, daß der Besucher eine bestimmte Familie mit zwei Kindern aufsucht; das zweite darin, daß eines der Kinder den Raum betritt. Die möglichen Auskommen des zusammengesetzten Experiments werden durch folgenden Stichprobenraum dargestellt.

$$V = \{ (J,J,1), (J,J,2), (J,M,1), (J,M,2), (M,J,1) \\ (M,J,2), (M,M,1), (M,M,2) \} .$$

Dabei sollen die ersten beiden Elemente jeden Tripels das Geschlecht der Kinder in der Reihenfolge der Geburt angeben, und das dritte Elemente gibt an, welches der Kinder den Raum betritt, wobei die Zahl 1 für das ältere Kind steht und die Zahl 2 für das jüngere. Jedes mögliche Auskommen habe die Wahrscheinlichkeit $^1/_8$.

Das Ereignis A, daß beide Kinder Jungen sind, stellt sich als Teilmenge von V in der Form dar
$A = \{ (J,J,1), (J,J,2) \}$.
Das Ereignis, daß ein Junge den Raum betritt, ist
$G = \{ (J,J,1), (J,J,2), (J,M,1), (M,J,2) \}$.
Wir erhalten

$$P(A/G) = \frac{P(AG)}{P(G)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} .$$

Der erste Teil der Aufgabe wäre korrekt so zu lösen:
Es ist $B = \{(J,J,1), (J,M,1)\}$ und somit

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2} .$$

Wie liegt der Fall, wenn der Besucher seine Information, daß eines der Kinder ein Junge ist, nicht dadurch erhält, daß ein Junge den Raum betritt, sondern dadurch, daß die Eltern die Frage, ob eines ihrer Kinder ein Junge ist, bejahen?
Das zweite Zufallsexperiment besteht jetzt also nicht darin, daß ein Kind den Raum betritt, sondern darin, daß eine Frage gestellt wird, die bejaht oder verneint

werden kann. Wir setzen voraus, daß die Eltern nicht lügen und bilden den Stichprobenraum

W = { (J, J, ja), (J, M, ja), (M, J, ja), (M, M, nein) } .

Das Ereignis, daß die Frage bejaht wird, ist

H = { (J, J, ja), (J, M, ja), (M, J, ja) } . Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses K = { (J, J, ja) } , daß beide Kinder Jungen sind, unter der Voraussetzung, daß die Frage nach einem Jungen bejaht wurde

$$P(K/H) = \frac{P(KH)}{P(H)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} .$$

Hat ein Versuch α die k möglichen Auskommen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ mit $P(\{\omega\}) = p_i$, so ist die Unbestimmtheit oder Entropie des Versuches definiert durch $E(\alpha) = -p_1 \cdot \log p_1 - p_2 \cdot \log p_2 - \ldots - p_k \log p_k$. Vergleiche Jaglom (1965) oder Meschkowski (1968). Wir kommen also zu dem auf den ersten Blick vielleicht überraschendes Ergebnis, daß die Unsicherheit bezüglich des Geschlechts des zweiten Kindes größer ist, wenn der Besucher einen Jungen der Familie sieht, als wenn er von der Existenz eines Jungen durch die Beantwortung seiner Frage erfährt. Verblüffend mag das Ergebnis vor allem deshalb erscheinen, weil man das Gefühl hat, daß im Auftreten eines Jungen sicherlich soviel Information steckt wie in der Antwort der Eltern. Wir wollen deshalb das Problem noch vom Standpunkt der Informationstheorie aus untersuchen.

Die Lösung für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, daß beiden Fällen andersartige Experimente zugrunde liegen. Im Falle, daß ein Kind den Raum betritt, hatten wir die möglichen Versuchsergebnisse durch den Stichprobenraum V beschrieben. Die Unbestimmtheit (Entropie) dieses Versuches ist

$$E^1 = \left(-\frac{1}{8} \log \frac{1}{8}\right) \cdot 8 = \log 8$$

Nachdem der Junge den Raum betreten hat, weiß man, daß nur noch die Fälle (J, J, 1), (J, J, 2), (J, M, 1) und (M, J, 2) in Frage kommen. Jedem dieser Auskommen wird die Wahrscheinlichkeit $1/4$ zugebilligt.

Die bedingte Entropie des Experimentes unter der Voraussetzung, daß ein Junge eingetreten ist, beträgt daher

$$E^1_G = \left(-\frac{1}{4} \log \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \log 4$$

Ist $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \}$ der Stichprobenraum eines Versuches, so liefert ein Ereignis $S \subset \Omega$ definitionsgemäß die Information $I_S = \log \frac{1}{P(S)}$. Haben alle Elementarereignisse ω_i die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{k}$, so stimmt die Information des Ereignisses S mit dem dadurch bedingten Verlust an Unbestimmtheit überein, d.h. $I_S = E - E_S$.

Die Information, die das Auftreten eines Jungen über das zusammengesetzte Experiment liefert, ist also

$$I^1 = E^1 - E^1_G = \log 8 - \log 4 = \log 2.$$

Im Falle, daß die Information, daß ein Junge zur Familie gehört, durch die Beantwortung der Frage erfolgt, erhalten wir analog

$$E^2 = \left(-\frac{1}{4} \log \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \log 4,$$

$$E^2_H = \left(-\frac{1}{3} \log \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = \log 3 \text{ und}$$

$$I^2 = E^2 - E^2_H = \log \frac{4}{3} .$$

Tatsächlich ist also die Information durch die Antwort der Eltern kleiner als die durch das Auftreten eines Jungen. Aber beide Informationen beziehen sich auf verschiedene Experimente. Das Experiement, über das wir eine Information durch die Antwort der Eltern erhalten, hat von vornherein eine geringere Unbestimmtheit bezüglich des Ausganges als das Experiment, in dem das Kind auftritt. Die Ursache hierfür liegt natürlich darin, daß die Antwort der Eltern nicht zufällig erfolgt, sondern durch den Ausgang des ersten Experimentes, nämlich der Wahl einer Familie, bereits festgelegt ist.

Zum Abschluß sei noch gesagt, daß das Buch von Seymour Lipschutz trotz des hier aufgezeigten Fehlers als Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie bestens zu empfehlen ist.

Schrifttumsverzeichnis

Jaglom, A.M.
Jaglom, J.M. — Wahrscheinlichkeit und Information, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965

Lipschutz, S. — Theory and Problems of Probability, McGraw-Hill Book Corp., New York 1968

Meschkowski, H. — Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim 1968

Eingegangen am 5. August 1971

Anschrift des Verfassers:
Dr. G. Schrage
593 Hüttental-Weidenau
Adolf- Reichwein-Str. 2

Richtlinien für die Manuskriptabfassung.

Es wird zur Beschleunigung der Publikation gebeten, Beiträge an die Schriftleitung in doppelter Ausfertigung einzureichen. Etwaige Tuschzeichnungen oder Photos brauchen nur einfach eingereicht zu werden.
Artikel von mehr als 12 Druckseiten Umfang können in der Regel nicht angenommen werden. Unverlangte Manuskripte können nur zurückgesandt werden, wenn Rückporto beiliegt. Es wird gebeten bei nicht in deutscher Sprache verfaßten Manuskripten eine deutsche Zusammenfassung anzufügen ~~*und wenn möglich, zur Vermeidung von Druckfehlern, das Manuskript in Proportionalschrift mit Randausgleich als fertige Photodruckvorlage einzusenden.*~~



Die verwendete Literatur ist, nach Autorennamen alphabetisch (verschiedene Werke desselben Autors chronologisch) geordnet, in einem Schrifttumsverzeichnis am Schluß des Beitrags zusammenzustellen. Die Vornamen der Autoren sind mindestens abgekürzt zu nennen. Bei selbständigen Veröffentlichungen sind Titel, Erscheinungsort und -jahr, womöglich auch Verlag, anzugeben. Zeitschriftenbeiträge werden vermerkt durch Name der Zeitschrift, Band, Seite (z. B. S. 317–324) und Jahr, in dieser Reihenfolge. (Titel der Arbeit kann angeführt werden). Im selben Jahr erschienene Arbeiten desselben Autors werden durch den Zusatz „a", „b" etc. ausgezeichnet. Im Text soll grundsätzlich durch Nennung des Autorennamens und des Erscheinungsjahrs des zitierten Werkes (evtl. mit dem Zusatz „a" etc.), in der Regel aber nicht durch Anführung des ganzen Buchtitels zitiert werden. Wo es sinnvoll ist, sollte bei selbständigen Veröffentlichungen und längeren Zeitschriftenartikeln auch Seitenzahl oder Paragraph genannt werden. Anmerkungen sind zu vermeiden.

Forme des manuscrits.

Pour accélérer la publication les auteurs sont priés, de bien vouloir envoyer les manuscrits en deux exemplaires. Des figures (à l'encre de chine) et des photos, un exemplaire suffit.
En général les manuscrits qui fourniraient plus de 12 pages imprimées ne peuvent être acceptés. Les manuscrits non demandés ne deuvent être rendus que si les frais de retour sont joints. Si les manuscrits ne sont pas écrits en allemand, les auteurs sont priés de bien vouloir ajouter un résumé en allemand ~~*et, si possible, pour éviter des fautes d'impression, de fournir le manuscript comme original de l'impression phototechnique, c'est-à-dire tapé avec une machine aux caractères standard et avec marges étroites.*~~



La littérature utilisée doit être citée à la fin de l'article par ordre alphabétique; plusieurs oeuvres du même auteur peuvent être enumérées par ordre chronologique. Le prénom de chaque auteur doît être ajouté, au moins en abrégé. Indiquez le titre, le lieu et l'année de publication, et, si possible, l'éditeur des livres, ou, en cas d'articles de revue, le nom de la révue, le tome, les pages (p.ex. p. 317–324) et l'année, suivant cet ordre; le titre des travaux parus dans de revues peut être mentionné. Les travaux d'un auteur parus la même année sont distingués par «a», «b» etc. Dans le texte on cite le nom de l'auteur, suivi de l'année de l'édition (éventuellement complété par «a» etc.), mais non pas, en général, le titre de l'ouvrage; si c'est utile on peut ajouter la page ou le paragraphe. Evitez les remarques en bas de pages.

Form of Manuscript.

To speed up publication please send two copies of your paper. From photographs and figures (in indian ink) only one copy is required.
Papers which would cover more than 12 printed pages can normally not be accepted. Manuscripts which have not been asked for by the editor, are only returned if postage is enclosed.
If manuscripts are not written in German, a German summary is requested. ~~*If possible these manuscripts should be written as original for phototechnical printing, i. e. typed with proportional types and with straight-line margin.*~~



Papers cited should appear in the Bibliography at the end of the paper in alphabetical order by author, several papers of the same author in chronological order. Give at least the initials of the authors. For books give also the title, the place and year of publication, and, if possible, the publishers. For papers published in periodicals give at least the title of the periodical in the standard international abbreviation, the volume, the pages (e.g. p. 317–324) and the year of publication. (It is useful to add the title of the publication.) When more than one paper of the same author and the same year of publication is cited, the papers are distinguished by a small letter following the year, such as "a", "b" etc. References should be cited in the text by the author's name and the year of publication (if necessary followed by "a" etc.), but generally not with the full title of the paper. It might be useful to mark also the page or paragraphe referred to.